PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 14. 15. Juli 1918. Redaktionsschluß für No. 16 am 12. Juli 1918. 19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

A. Sommerfeld, Atombau und Röntgenspektren. I. Teil. S. 297.

J. Kroo, Der erste und zweite Elektronenring der Atome. S. 307.

W. Porstmann, Die Theorie der Formatteform. S. 311.

T. Heurlinger, Über die Störungen in den Linienserien der Bandenspektren. S. 316.

Besprechungen:

J. M. Eder, Johann Heinrich Schulze. S. 318.

R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. S. 319.

L. Lucas, Die Akkumulatoren und galvanischen Elemente. S. 320.

Personalien. S. 320.

Gesuche. S. 320.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Atombau und Röntgenspektren. I. Teil.

Von A. Sommerfeld.

§ 1. Einleitung.

In der Theorie der Röntgenspektren[1]) bin ich von der Tatsache der genauen Wasserstoffähnlichkeit der Röntgendubletts ausgegangen, die sich mit großer Schärfe durch das ganze System der Elemente hindurch verfolgen läßt. Diese Tatsache führte zur Isolierung des L-Terms. Während nämlich die Schwingungszahl ν der Linie L_α gleichzeitig von dem L- und M-Term oder diejenige von K_α gleichzeitig von dem K- und L-Term abhängt, bestimmt sich die Schwingungsdifferenz $\Delta\nu$ der L-Dubletts aus dem L-Term allein. Während also auf die absolute Lage der Linien L_α, K_α die Bestimmungsstücke je zweier Bahnen Einfluß haben, wird die relative Lage der Linien des L-Dubletts durch die Bestimmungsstücke der einzigen L-Bahn gegeben. Dieser Umstand bringt für die Rechnung offenbar einen großen methodischen Vorteil mit sich, indem die Zahl der Unbekannten dadurch verkleinert, die Sicherheit ihrer Ermittlung vergrößert wird.

Meine frühere Behandlung führte auf die folgende Darstellung der L-Dubletts bzw. des L-Terms:

$$\Delta\nu = \frac{N\alpha^2}{2^4}(Z-3{,}5)^4, \qquad L = \frac{N}{2^2}(Z-3{,}5)^2,$$

(N = Rydberg-Frequenz, Z = Ordnungszahl; beide Formeln geben nur die ersten Glieder von Reihenentwicklungen nach der kleinen Größe

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = 7{,}26 \cdot 10^{-3}$$

und sind durch Glieder mit höheren Potenzen dieser Größe (höheren Relativitätskorrektionen) zu ergänzen). Es ergab sich also der unganze Kernladungsdefekt 3,5; Herr Swinne fand[1]) durch eine ähnliche, aber von der meinigen unabhängige Rechnung 3,6. Dieser unganze Kernladungsdefekt bildete eine in die Augen fallende Schwierigkeit für meine frühere Auffassung. Während eine ganzzahlige Abweichung von Z unmittelbar als Abschirmung der Kernladung durch Elektronen, die der Kernladung benachbart sind, gedeutet werden kann, blieb eine unganze Abweichung unverständlich, solange an der Annahme festgehalten wurde, daß die L-Bahn von einem einzelnen Elektron beschrieben werden sollte. Allerdings war schon von Moseley und Bohr die an sich befriedigendere Möglichkeit ins Auge gefaßt worden, daß die Bahn von mehreren (n) Elektronen besetzt sein könnte. Dann tritt bekanntlich als Folge der abstoßenden Wirkung dieser Elektronen eine unganze Abschirmung der Kernladung auf im Betrage

$$s_n = \frac{1}{4}\sum_{1}^{n-1}{}^{(k)}\frac{1}{\sin\frac{\pi k}{n}}.$$

Diese Vorstellung schien aber nur auf den Fall der Kreisbahnen zu passen, auf welche man ja n-Elektronen ohne Schwierigkeit äquidistant verteilen kann. Nun ging aber aus meiner Theorie einwandfrei hervor, daß außer den Kreisbahnen auch Ellipsenbahnen auftreten und daß diese in einem reinen Keplerschen (Coulombschen) Felde verlaufen. Eine Verteilung von n-Elektronen auf eine Ellipsenbahn schien aber unmöglich, ohne daß der Coulombsche Charakter des Feldes aufgehoben und die Ellipsenbahn des einen Elektrons durch das Vorhandensein der anderen Elektronen gestört würde. Die Schwierigkeit beruht indessen nur auf einer falschen Verallgemeinerung. Man

1) Ann. d. Phys. 51, 125, 1916, Teil III.

1) R. Swinne, diese Zeitschr. 17, 481, 1916.

muß[1]) sich die n-Elektronen nicht auf derselben Ellipse verteilt denken, sondern muß jedes Elektron seine eigene, den übrigen kongruente Ellipse um den Kern als Brennpunkt beschreiben lassen, wobei jede Ellipse um den Winkel $2\pi/n$ gegen die Nachbarellipsen gedreht ist. Die so entstehende Konfiguration wollen wir einen „Ellipsenverein" nennen. Verbindet man dann die jeweilige Lage der n-Elektronen durch einen Linienzug, so erhält man stets ein reguläres n-Eck, dessen Größe sich erweitert oder verengert, je nachdem die n-Elektronen sich ihrem Aphel oder Perihel nähern, was sie im genau gleichen Rhythmus tun. Aus der Vorstellung des regulären n-Ecks ergibt sich dann ohne weiteres, daß die Abstoßungen, die ein Elektron von den $n-1$ übrigen erfährt, eine Resultante haben, die dauernd durch den Kern geht und daher durch eine Schwächung der Kernladung nach der Regel $Z-s_n$ dargestellt wird. Bei dieser Anordnung der Elektronen bleibt also der Kepler-Charakter der Bahnen streng erhalten. Der Fall der mehrfach besetzten Kreisbahn hat nur die Besonderheit vor dem allgemeinen Falle des Ellipsenvereins voraus, daß hier die n-Bahnen sich für das Auge überdecken zu einer gemeinsamen Kreisbahn.

Nachdem hiernach die Tatsache der wasserstoffähnlichen Dubletts nicht mehr als Schwierigkeit der Vorstellung mehrfach besetzter Ringe im Wege steht, wird man nicht nur an die Erklärung der unganzen Kernladungsdefekte, sondern auch an die allgemeine Frage herantreten: Wie baut sich das Atom aus seinen Elektronenringen auf? Welche Elektronenzahl entfällt auf jeden Ring? Dabei wird man, an ältere Ansätze J. J. Thomsons und an die systematischen Ausführungen W. Kossels[2]) anknüpfend, die Frage des Atombaues im Zusammenhang mit dem Aufbau des periodischen Systems betrachten. Wenn auch die Valenzverhältnisse, auf die sich das periodische System gründet, nur etwas über die äußerste Hülle der Atome lehren und über die Elektronenanordnung im Innern nichts aussagen, so wird man immerhin, wenigstens probeweise, an die Frage der Elektronenzahlen in den einzelnen Ringen mit der Vermutung herantreten: sie möchten übereinstimmen mit den Periodenzahlen der Elemente im natürlichen System. Man wird also vermutungsweise dem K-Ring 2, dem L-Ring 8, dem M-Ring 8, dem N-Ring 18 usw. Elektronen zuschreiben. Bei dieser Zählung der Perioden ist H und He zu einer ersten Periode vereinigt, die zweite Periode beginnt mit Li und jede folgende je mit dem nächsten Alkali. Das besondere Interesse der Röntgenspektren liegt dann darin, daß sie uns Material liefern, um diese Vermutung zu prüfen.

Eine starke Stütze findet diese Vermutung zunächst in dem Abbrechen der K-Linien bei kleinen Ordnungszahlen. Die Linie K_γ ist beobachtet bis herunter zu $Z=20$, Ca, die Linie K_β bis $Z=12$, Mg. Da K_γ dem Übergang eines Elektrons aus dem N-Ring in den K-Ring, K_β demjenigen aus dem M-Ring in den K-Ring entspricht, dürfen wir sagen: Bei Ca tritt der N-Ring, bei Mg der M-Ring zuerst auf. Nach unserer Vermutung und nach dem Vorgange von W. Kossel würden wir den N-Ring zuerst bei $Z=19$, K, den M-Ring zuerst bei $Z=11$, Na, erwarten, und zwar mit je nur einem Elektron vertreten. Wie aber bereits R. Swinne[1]) bei Na bemerkt, kann man ungezwungen annehmen, daß sich das eine äußerste Elektron in dem (als Salz untersuchten) Alkali als Valenzelektron betätigt und sich daher außerhalb des Atomverbandes befindet. Mit Rücksicht auf diese Korrektur des Beobachtungsbefundes bestätigt also das Abbrechen von K_γ sowohl wie das von K_β durchaus unsere Annahme über die Besetzung der ersten Ringe. Dabei wäre noch dem Einwand entgegenzutreten: Es beweise nichts, daß K_β bei Na nicht beobachtet sei, weil hier die Beobachtungen überhaupt wegen der Weichheit der Strahlen unsicher werden. Tatsächlich ist K_β härter wie K_α; wenn also K_α gemessen werden konnte, liegt kein Grund vor, weshalb sich K_β der Messung entzogen haben sollte. Die größere Lichtschwäche von K_β dürfte für die Messung durch seine größere Härte etwa kompensiert werden. Unter diesem Gesichtspunkte gewinnt die Verfolgung der verschiedenen Linien auch bei der L- und M-Serie nach den kleinen Ordnungszahlen hin und der Ort ihres Abbrechens ein hervorragendes Interesse für die Topologie des Atoms.

Eine anderweitige allgemeine Stütze findet unsere Auffassung in der wohlbekannten Kurve der Atomvolumina. Wie ich nämlich an an-

1) Den Hinweis auf diesen Bewegungsmodus, der übrigens in der theoretischen Astronomie nicht unbekannt sein dürfte, verdanke ich Herrn F. Pauer. Herr Swinne zeigte mir dann, daß er auch schon bei Nicholson, Phil. Mag. **27**, 557, 1914 vorkommt. Für mein Gefühl hat die kunstreiche Aneinanderpassung der n Elektronenbahnen in unserem „Ellipsenverein" nichts Unnatürliches, vielmehr sehe ich darin ein Anzeichen für die hohe Bewegungsharmonie, die im Atominnern herrschen muß.

2) W. Kossel, Über Molekülbildung, Ann. d. Phys. **49**, 229, 1916.

1) Diese Zeitschr. l. c. S. 487.

derer Stelle[1]) demnächst ausführen werde, kann man die „Größe der Atome", d. h. den Radius ihres äußersten Ringes, bestimmen und erhält, wenn man sie zur Ordnungszahl als Abszisse aufträgt, eine Kurve, die in vieler Hinsicht einen analogen Gang besitzt, wie die Kurve der Atomvolumina. Dabei wird — in Übereinstimmung mit unserer obigen Vermutung — angenommen, daß mit jedem neuen Alkali ein neuer Elektronenring ansetzt. Allerdings ist diese Bestätigung unserer Auffassung — wegen der etwas problematischen Beziehung zwischen Atomgröße und Atomvolumen — weniger sicher wie die vorherige; auch sagt sie, ähnlich wie die Valenz, nichts über die Besetzung der inneren Elektronenringe aus, sondern betrifft nur die Peripherie des Atoms.

Allgemein sei folgendes bemerkt: Die Stabilitätsverhältnisse in dem äußersten Atomringe brauchen nicht dieselben zu sein, wie in demselben Ring, wenn er beim Fortschreiten im periodischen System durch Anlagerung neuer Elektronen zu einem inneren Ringe geworden ist. Vielmehr ist es sehr gut denkbar, daß der Ring im letzteren Falle mehr Elektronen aufnehmen kann, wie wenn er die Atomperipherie bildet. Wenn dem so ist, so müßte das neue Elektron, welches beim Übergang zum nächsten Elemente jeweils hinzukommen muß, nicht immer im äußersten Ring angesetzt werden, sondern könnte an gewissen Stellen des periodischen Systems einem inneren Ring aufgedrückt werden. Stellen, die dafür in Betracht kommen, sind die Triaden *FeNiCo*, *RuRhPd*, *Os*, *Ir*, *Pt*, sowie die ganze Gruppe der seltenen Erden, weil hier offenbar wegen der chemischen Ähnlichkeit derselben der regelmäßige Fortschritt im äußeren Wachstum des Atomes vorübergehend unterbrochen ist. Wir schließen dementsprechend folgendes: Die Periodenzahlen des natürlichen Systems der Elemente geben nur einen allgemeinen Anhalt für die zu erwartenden Besetzungszahlen der entsprechenden inneren Ringe; insbesondere wäre es verständlich, wenn sich die letzteren als etwas größer herausstellen würden, wie die ersteren.

Was ergibt nun die quantitative Durchrechnung der Röntgenspektren bezüglich der Elektronenzahl der einzelnen Ringe? Debye[2]), der diese Frage bei K_α zuerst angegriffen hat, findet, daß der K-Ring aus 3 Elektronen gebildet sei; der L-Ring, der im Elektronenaustausch mit dem K-Ring steht, soll dabei im Anfangszustand ein, im Endzustand kein Elektron besitzen. Die letztere Auffassung werden wir sogleich durch eine andere ersetzen, die sich unserer Erwartung besser fügt. Andererseits liegt das Debyesche Ergebnis bezüglich des K-Ringes wenigstens in der Nähe der von uns vermuteten Elektronenzahl 2. Des Genaueren wäre dazu folgendes zu bemerken: Debye sieht den Anfangszustand des K-Ringes (Besetzungszahl 2) als den ungesättigten, den Endzustand (Besetzungszahl 3) als den normalen an. Demgegenüber könnte man zunächst auch meinen: der Anfangszustand (2) sei der normale, der Endzustand (3) ein übersättigter Zustand, bei dem dem K-Ring ein fremdes Elektron aufgezwungen ist. Man denke an die Erzeugung der Röntgenspektren durch die anregenden Kathodenstrahlen. Ein fremdes Elektron wird in das Atom hineingeschossen. Soll K_α entstehen, so müßte es im L-Ring abgefangen werden und in den K-Ring hineinfallen. Von hier aus könnte es natürlich scheinen, daß der Anfangszustand des L-Ringes und der Endzustand des K-Ringes der übersättigte ist. Als normale Besetzungszahl des K-Ringes würde dann aus Debyes Berechnung 2 folgen, wie wir es ursprünglich erwarteten. Indessen darf nicht übersehen werden, daß die fundamentale Tatsache der K-Absorptionsgrenze dieser Auffassung der K_α-Emission entscheidend entgegensteht. Man deutet sie bekanntlich nach Kossel so, daß die Entfernung eines Elektrons aus dem K-Ring Vorbedingung ist für die Entstehung von K_α, K_β, K_γ, wobei also der Anfangszustand im K-Ring ein unnormaler, untersättigter sein muß, wie Debye es annimmt. Die Entscheidung ist von einer genauen formelmäßigen Deutung der K-Absorptionsgrenze zu erwarten, oder von derjenigen der L_α-Linie, bei deren Erzeugung der K-Ring sicher in seinem natürlichen Zustande sich befindet.

In teilweisem Gegensatz zu Debye findet Herr Kroo (vgl. die nachfolgende Arbeit, von deren Ergebnis er mir freundlicherweise schon im vorigen Jahre Mitteilung gemacht hatte), daß bei K_α der L-Ring anfangs 9 Elektronen enthalte, und im Endzustande auf 8 Elektronen heruntergehe. Nicht nur die etwas bessere numerische Übereinstimmung mit den Beobachtungen, sondern vor allem die innere Wahrscheinlichkeit spricht meiner Meinung nach für das Kroosche Ergebnis. Den mathematischen Grund dafür, daß die Annahmen 8 und 9 für den Endzustand des L-Ringes zu nahezu denselben Folgerungen für K_α führen müssen, werden wir in § 4 besprechen. Andererseits schreibt

1) In der Festsitzung der D. Physik. Gesellschaft zum 60. Geburtstag von M. Planck. Die dort gehaltenen Vorträge erscheinen demnächst in Karlsruhe, C. F. Müllersche Hofbuchhandlung.

2) Diese Zeitschr. 18, 276, 1917.

Herr Vegard[1]) dem L-Ring bei der Entstehung von L_α 7 Elektronen als normale Besetzungszahl zu (für die Entstehung von K_α hält er dagegen an den Debyeschen Annahmen fest). Soviel ich sehe, beansprucht aber die Vegardsche Arbeit keine große Genauigkeit; auch setzt sie sich mit der Tatsache der Dubletts nicht auseinander.

Um sicher zu gehen, muß man zunächst die Theorie der mehrfach besetzten Elektronenringe mathematisch fundieren. Deshalb betrachte ich in § 2 das Atom als ein mechanisches System von soviel Freiheitsgraden als es Elektronenringe besitzt. Die Koordinaten dieses Systems sind die Radien der Ringe; sie werden durch die (am bequemsten in Hamiltonscher Form zu schreibenden) Gleichgewichtsbedingungen des Systems bestimmt, in die alle Wechselwirkungen zwischen den Ringen eingehen. Das Endresultat für die Energie ist in seinem Hauptbestandteil überraschend einfach: Jeder Ring liefert einen Beitrag, der sich so berechnet, als ob die zu ihm äußeren Ringe nicht vorhanden, die inneren auf den Kern zusammengezogen wären. Die Wechselwirkungskorrektionen, die genau ermittelt werden, erweisen sich in dem besonderen Falle von K_α (§ 4) als belanglos; auch in anderen Fällen dürfte ihr Beitrag nicht erheblich sein. Das Resultat läßt sich auch so aussprechen: Man kann der Hauptsache nach ganz so rechnen, wie man es bisher nach Debye usw. getan hat, und kann die Genauigkeit der Rechnung durch Angabe der Korrektionen prüfen.

Soweit wurden die Ringe als komplanar, das ganze Atom also als ebene Anordnung angenommen. In § 3 wird diese Annahme fallen gelassen. Indem man beliebige Neigungswinkel zwischen den Ringen berücksichtigt, steigert sich die Zahl der Unbekannten des Systems, die durch Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen sind. Bei zwei und drei Ringen erweist sich die zueinander normale Lage der Ringe als stabil, die komplanare Lage als instabil. Der Energieausdruck behält aber auch bei geneigten Ringen die soeben beschriebene einfache Form: Die Neigungswinkel gehen nur in die Wechselwirkungskorrektionen ein, der Hauptbestandteil ist derselbe wie bei komplanaren Ringen. Insoweit also, als der Korrektionsbestandteil belanglos ist, kann die Beobachtung nichts über die gegenseitige Neigung der Ringe im Atom lehren. Die Beobachtungsgenauigkeit müßte noch erheblich gesteigert werden, wenn es durch Vermittelung der Wechselwirkungskorrektion möglich sein soll, die gegenseitige Neigung der Ringe aus den Beobachtungen zu berechnen.

Die Behandlung des Problems in diesem ersten Teile ist durchaus unvollständig und soll in einem zweiten Teile weitergeführt werden. Die gegenwärtige Veröffentlichung möge wesentlich als theoretische Unterlage für die nachfolgende Arbeit von Herrn Kroo angesehen werden. Bei der weiteren Verfolgung des Problems treten eine Reihe von Schwierigkeiten auf, die möglicherweise die Grundlage der Theorie umzugestalten zwingen werden. Diese Schwierigkeiten betreffen, außer der numerischen Darstellung der einzelnen Linien und Absorptionskanten, einerseits die Dublettheorie, andererseits die Abweichungen vom Kombinationsprinzip.

1. Durch unsere Vorstellung des Ellipsenvereins ist zwar die Möglichkeit wasserstoffähnlicher Dubletts bei mehrfach besetzten Ringen dargetan. Die Erklärung des Kernladungsdefekts 3,5 beim L-Dublett und die Deutung des A-Dubletts steht aber noch aus. Überdies führt der Ausbau der Dublett-Theorie zu einigen unerwarteten Folgerungen: Die Linie K_β muß, ähnlich wie die Linie K_α, ein Dublett sein; ferner: Das L-Dublett ist nicht lediglich relativistischen Ursprungs, sondern teilweise auch begründet in den Wechselwirkungskorrektionen.

2. Als besonders schwerwiegend sehe ich die Abweichungen vom Kombinationsprinzip an. Nach den allgemeinen Vorstellungen von Kossel sollte, in Schwingungszahlen gerechnet, $K_\alpha + L_\alpha = K_\beta$ sein. In Wirklichkeit ist, wie ich schon früher betont habe, stets $K_\alpha + L_\alpha > K_\beta$. Wir wollen als „Kombinationsdefekt" bezeichnen die Differenz

$$\Delta = K_\alpha + L_\alpha - K_\beta.$$

Es lassen sich noch andere solche Kombinationsdefekte bilden, nämlich

$$\Delta = K_\alpha + L_\gamma - K_\gamma$$
$$\Delta = L_\alpha + M_\alpha - L_\gamma$$

usw. Alle diese Δ sind ausnahmslos positiv; ihr Zahlenwert ist natürlich, da es sich um eine kleine Differenz zwischen zwei großen Zahlen handelt, nicht sehr genau. Immerhin läßt er ein allgemeines Gesetz deutlich hervortreten: Es ist $\partial \Delta / \partial Z$ in allen Fällen konstant und etwa gleich 0,8. Dieses allgemeine empirische Resultat läßt auf eine Irreversibilität, auf eine Art Hysterese beim Elektronenübergang schließen und ist mit der allgemeinen Grundlage unserer Theorie kaum verträglich, wonach die Frequenz der entstehenden Röntgenlinie einfach durch die Energiebilanz des ganzen Atoms

1) Ber. d. Deutschen Physik. Ges. 1918. S.

zwischen Anfangs- und Endzustand gegeben sein würde.

§ 2. Allgemeine Formel für die Energie eines ebenen Systems von Kreisringen.

Sei p_k Elektronenzahl, a_k Radius, ω_k Winkelgeschwindigkeit im $k$ten-Ringe. Die kinetische Energie des ganzen Ringsystems ist dann

$$T = \sum_k p_k \frac{m}{2} a_k^2 \omega_k^2. \qquad (1)$$

Indem wir den $k$ten-Ring als k-quantig erklären, entnehmen wir ω_k der azimutalen Quantenbedingung

$$m a_k^2 \omega_k = \frac{k h}{2\pi}. \qquad (2)$$

Führen wir noch die Bezeichnungen ein

$$\alpha_k = \frac{a_k}{a_0}, \qquad a_0 = \frac{h^2}{(2\pi e)^2 m}, \qquad (3)$$

wo a_0 den Radius des ersten Ringes bei Wasserstoff und α_k den verhältnismäßigen Radius unseres $k$ten-Ringes bedeutet, so können wir die kinetische Energie auch schreiben

$$T = \sum p_k \frac{k^2 h^2}{8\pi^2 m a_0^2 \alpha_k^2} = \frac{e^2}{2 a_0} \sum p_k \frac{k^2}{\alpha_k^2}. \qquad (4)$$

Die potentielle Energie des Kernes gegen den $k$ten-Ring ist (Ze = Kernladung)

$$- p_k \frac{e^2 Z}{a_k}, \qquad (5\,a)$$

diejenige des $k$ten-Ringes gegen sich selbst

$$+ p_k \frac{e^2 s_k}{a_k}, \qquad (5\,b)$$

wo in Bohrscher Bezeichnung (vgl. Einleitung) bedeutet

$$s_k = \frac{1}{4} \sum_1^{k-1} {}^{(n)} \frac{1}{\sin \frac{n\pi}{p_k}}.$$

(Daß als Index von s abkürzend k statt p_k geschrieben ist, wird kein Mißverständnis hervorrufen.)

Wir fassen beide Beiträge (5 a, b) zusammen zu

$$U_k = - p_k \frac{e^2 (Z - s_k)}{a_k}. \qquad (5)$$

Sodann bilden wir die wechselseitige potentielle Energie des $k$ten- und $j$ten-Ringes. Hierbei werden wir die Ringe gleichförmig mit Ladung belegt denken (was bei der vorangehenden Berechnung des Selbstpotentiales der Ringe natürlich nicht erlaubt gewesen wäre). Wir erhalten so

$$V_{jk} = \frac{p_j p_k e^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \frac{1}{\sqrt{a^2 + a_k^2 - 2 a\, a_k \cos(\varphi - \psi)}} = \frac{p_j p_k e^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 + a_k^2 - 2 a\, a_k \cos\varphi}}.$$

Sei $a_k > a$. Durch Potenzentwicklung nach a/a_k (Kugelfunktionen-Reihe) ergibt sich

$$V_{jk} = \frac{p_j p_k e^2}{a_k} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{a_j}{a_k}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(\frac{a_j}{a_k}\right)^4 + \cdots\right). \qquad (5\,a)$$

Das erste Glied dieser Reihe fassen wir mit U_k zusammen, alle höheren Glieder vernachlässigen wir gegen das zweite. Wir erhalten so als Hauptbestandteil und als Korrektionsglied der gesamten potentiellen Energie des Systems

$$U = - e^2 \sum_k p_k \frac{Z_k}{a_k}, \qquad Z_k = Z - \sum_1^{k-1} p_j - s_k, \qquad (6)$$

$$V = \frac{e^2}{4} \sum_{j<k} \sum p_j p_k \frac{a_j^2}{a_k^3}. \qquad (7)$$

Die Definition der „wirksamen Kernladungszahl" Z_k für den $k$ten-Ring, die sich durch unsere Ableitung bemerkenswerterweise von selbst ergibt, ist nachträglich leicht verständlich: Die eigentliche Kernladung Z wird um so viel ganze Ladungseinheiten abgeschirmt, als die Besetzung der inneren Ringe beträgt ($j < k$), außerdem um einen gewissen Bruchteil s_k von der Ladung des $k$ten-Ringes selbst.

Unser Ringsystem hat soviel Freiheitsgrade, als es Ringe gibt. Jeder Freiheitsgrad wird — nach Erfüllung der Quantenbedingungen (2) — je durch eine Unbekannte α_k gekennzeichnet. Es handelt sich nun darum, diese Unbekannten simultan zu bestimmen.

Man kann dies etwa so machen, daß man, die a_k als System-Koordinaten auffassend, die Lagrangesche Funktion $L = T - U - V$ in diesen anschreibt. Die Gleichgewichtsbedingungen, wie sie als Spezialfall der allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen folgen, lauten dann:

$$\frac{\partial L}{\partial a_k} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\partial T}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k}(U + V), \qquad (8)$$

d. h. wegen (1), (6), (7) nach Fortheben des gemeinsamen Faktors p_k:

$$m a_k \omega_k^2 = \frac{\partial}{\partial a_k} \left(- e^2 \frac{Z_k}{a_k} + \frac{e^2}{4} \sum_{j<k} p_j \frac{a_j^2}{a_k^3} + \frac{e^2}{4} \sum_{j>k} p_j \frac{a_k^2}{a_j^3} \right). \qquad (9)$$

Die linke Seite ist nichts anderes wie die gewöhnliche Zentrifugalkraft, und die ganze Gleichung nichts anderes als das Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und elektrischer Anziehung bzw. Abstoßung. Auf der rechten Seite sind nur diejenigen Glieder von U und V hingeschrieben, welche a_k enthalten. In V sind dies teils solche Glieder, für die $j<k$ ist, teils solche Glieder, für die $j>k$ und für die daher in (7) die Benennung von j und k zu vertauschen ist. Führt man die Differentiation in (9) aus, so folgt

$$\frac{m\,a_k^3\omega_k^2}{e^2} = Z_k - \frac{3}{4}\sum_{j<k} p_j\left(\frac{a_j}{a_k}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j>k} p_j\left(\frac{a_k}{a_j}\right)^3.$$

Mittels der Quantenbedingung (2) und der Abkürzungen (3) schreibt sich die linke Seite:

$$\frac{k^2h^2}{4\pi^2 m e^2 a_k} = \frac{k^2 a_0}{a_k} = \frac{k^2}{\alpha_k}.$$

Unsere Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten α_k nehmen also die einfache Form an

$$\left.\begin{aligned} \frac{k^2}{\alpha_k} &= Z_k + A_k, \\ A_k &= -\frac{3}{4}\sum_{j<k} p_j\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_k}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j>k} p_j\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_j}\right)^3. \end{aligned}\right| \quad (10)$$

Man gelangt noch etwas direkter zu diesen Gleichungen, wenn man von dem Ausdruck (4) für T ausgeht, in dem die Geschwindigkeitskoordinaten ω_k bereits mittels der Quantenbedingungen durch die entsprechenden Impulskoordinaten ausgedrückt sind. Man muß dann aber statt der Lagrangeschen Funktion L die Hamiltonsche Funktion $H = T + U + V$ benutzen; die Gleichgewichtsbedingungen schreiben sich dann, wenn wir statt der a_k sogleich die α_k einführen, in der Form:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_k} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial}{\partial \alpha_k}(U+V). \quad (11)$$

Vermöge (4), (6) und (7) ist diese Gleichung nach Fortheben des gemeinsamen Faktors $e^2 a_0 \alpha_k^2$ in der Tat identisch mit (10).

Die Gleichungen (10) würden uns vor ein umständliches Eliminationsproblem stellen, wenn wir nicht näherungsweise vorgehen und in A_k die ersten Näherungen

$$\alpha_k = \frac{k^2}{Z_k}, \qquad \alpha_j = \frac{j^2}{Z_j} \quad (12)$$

einsetzen dürften. Nach (10) und (12) hat man

$$A_k = -\frac{3}{4}\sum_{j<k} p_j \frac{j^4 Z_k^2}{k^4 Z_j^2} + \frac{1}{2}\sum_{j>k} p_j \frac{k^6 Z_j^3}{j^6 Z_k^3}.$$

Unsere weitere Aufgabe ist es, den Energieausdruck, unter Elimination der α_k, allein durch die Z_k auszudrücken. Wir bilden zu dem Ende zunächst nach (4) und (6)

$$T + U = -\frac{e^2}{2a_0}\sum \frac{p_k}{\alpha_k}\left(2Z_k - \frac{k^2}{\alpha_k}\right).$$

Indem wir aus (10) einsetzen, ergibt sich

$$T+U = -\frac{e^2}{2a_0}\sum \frac{p_k}{k^2}(Z_k + A_k)(Z_k - A_k),$$
$$= -Nh\left(\sum p_k \frac{Z_k^2}{k^2} - \sum p_k \frac{A_k^2}{k^2}\right).$$

In der Tat ist nach Definition von a_0:

$$\frac{e^2}{2a_0 h} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} = N = \text{Rydbergfrequenz}.$$

Entsprechend berechnet sich V durch Eintragen von (12) in (7)

$$V = \frac{Nh}{2}\sum_{j<k}\sum p_j p_k \frac{j^4 Z_k^3}{k^6 Z_j^2}.$$

Schließlich schreibt sich die Gesamtenergie W:

$$-\frac{W}{Nh} = \sum p_k \frac{Z_k^2}{k^2} + R_1 + R_2, \quad (13)$$

$$R_1 = -\frac{1}{2}\sum_{j<k}\sum p_j p_k \frac{j^4 Z_k^3}{k^6 Z_j^2}, \quad (14)$$

$$R_2 = -\sum p_k \frac{A_k^2}{k^2}. \quad (15)$$

Die drei Glieder, aus denen sich W zusammensetzt, sind bez. von der zweiten, der ersten und der nullten Ordnung in Z. Daraus, daß das Glied zweiter Ordnung die übrigen weit überwiegt, erklärt sich der wasserstoffähnliche Charakter der einfacheren Röntgenspektren.

Wir wollen zunächst dieses Resultat benutzen, um damit die Ergebnisse einer früheren Arbeit[1] teils zu bestätigen, teils zu berichtigen. Damals wurde die Energie eines Elektrons berechnet, das sich bewegt

a) im Felde eines Kernes und eines inneren Ringes (§ 3, l. c.),

b) im Felde eines Kernes und eines äußeren Ringes (§ 5, l. c.).

Im Falle a) wird unser früheres Resultat (l. c. Gl. (28) und (29)) durch unser jetziges Ergebnis in Gl. (13) bestätigt, wenn man die frühere Rechnung auf Kreisbahnen spezialisiert, nach Potenzen von n entwickelt und die beiderlei Bezeichnungen einander anpaßt.

Anders im Falle b). Um hier das frühere Resultat (l. c. Gl. (52)) mit der jetzigen Gl. (13) in Übereinstimmung zu bringen, muß man die früheren Definitionen (51) folgendermaßen abändern:

[1] A. Sommerfeld, Münchn. Akad. 1916, S. 131.

$$q = -\frac{5}{8}\frac{E'}{E}\left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \qquad (16)$$

$$[n, n'] = (n+n')^6\left(1 - \frac{3}{5}\frac{n^2}{(n+n')^2}\right). \qquad (17)$$

In der Tat war die früher angegebene Form des mit einem behafteten Korrektionsgliedes durch Rechenfehler entstellt. Aus der nunmehr berichtigten Form dieses Gliedes erkennt man aber, daß es in keiner Weise dazu dienen kann, die von Debye vorgeschlagene Darstellung von K_β mit den Beobachtungen über K_β in Einklang zu bringen. Während nämlich Debye eine Proportionalität des Korrektionsgliedes mit Z^2 nötig hat, ergibt sich nach unserer Berichtigung nur mehr eine Proportionalität desselben mit Z.

§ 3. Energie eines Systems von gegeneinander geneigten Kreisringen.

Die Bezeichnungen p_k, a_k, c_k, s_k .... des vorigen Paragraphen werden beibehalten. Offenbar ist an der Berechnung der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie U_k nichts zu ändern, auch wenn die Kreisringe nicht mehr alle in einer Ebene liegen. Nur die wechselseitige Energie V_{jk} zwischen den Ringen j und k ist neu zu berechnen.

Es werde die Ebene des Ringes k zur x—y-Ebene, die Schnittlinien der Ebenen der Ringe k und j zur x-Achse gemacht; der Winkel zwischen beiden Ebenen sei ϑ. Bedeuten φ und ψ Azimute in der Ebene k und j, so werden die Koordinaten eines laufenden Punktes im einen oder anderen Ring

$$x_k = a_k\cos\varphi, \quad y_k = a_k\sin\varphi, \quad z_k = 0,$$

$x_j = a_j\cos\psi$, $y_j = a_j\sin\psi\cos\vartheta$, $z_j = a_j\sin\psi\sin\vartheta$, somit

$$(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2 = a_k^2 + a_j^2 - 2a_ka_j\cos\Theta,$$

$$\cos\Theta = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta.$$

Denkt man beide Ringe gleichförmig mit den Ladungen p_ke bzw. p_je belegt, so ergibt sich als wechselseitige Energie

$$V_{jk} = \frac{p_jp_ke^2}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\psi\,\frac{1}{\sqrt{a_j^2 + a_k^2 - 2a_ja_k\cos\Theta}}$$

$$= \frac{p_jp_ke^2}{a_k}\left(1 + \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{8}\left(\frac{a_j}{a_k}\right)^2 + \cdots\right), \qquad (18)$$

wenn wir, unter der Annahme $a_k > a_j$, nach Potenzen von a_j/a_k entwickeln und höhere Potenzen wie die zweite vernachlässigen. Für $\vartheta = 0$ nimmt das zweite Glied der Klammer den früheren Wert [Gl. (5a)]

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a_j}{a_k}\right)^2$$

an; für $\vartheta = \pi/2$ hat es seinen kleinsten Wert

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{a_j}{a_k}\right)^2.$$

Man schließt daraus, daß nicht die komplanare, sondern die normale Lage zweier Ringe die stabile sein wird.

Wie früher fassen wir das erste Glied von (18) mit dem Ausdrucke (5) von U_k zusammen und erhalten durch Summation über alle k den früheren Hauptbestandteil U der potentiellen Energie des Ringsystems. Das zweite Glied von (18) summieren wir über alle j und k, wobei $j < k$ vorausgesetzt und statt ϑ weiterhin ϑ_{jk} geschrieben werden möge. Wir erhalten dann statt (7) als Korrektionsglied der gesamten potentiellen Energie

$$V = \frac{e^2}{2}\sum_j\sum_k c_{jk}p_jp_k\frac{a_j^2}{a_k^3}, \quad c_{jk} = \frac{3\cos^2\vartheta_{jk} - 1}{4}. \qquad (19)$$

Unser System bestehe aus n Ringen. Es hat dann zunächst die n Freiheitsgrade a_k. Für diese lauten die Gleichgewichtsbedingungen, nach dem Lagrangeschen Schema (8) oder dem Hamiltonschen Schema (11) gebildet, ähnlich wie in (10):

$$\left.\begin{aligned}\frac{k^2}{c_k} &= Z_k + A_k,\\ A_k &= -\frac{3}{2}\sum_{j<k}p_jc_{jk}\left(\frac{c_j}{c_k}\right)^2 + \sum_{j>k}p_jc_{jk}\left(\frac{c_k}{c_j}\right)^3.\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Hierzu kommen die Freiheitsgrade der gegenseitigen Lage der Ringe. Ihre Zahl ist $2n - 3$. Die Lage jedes Ringes ist nämlich durch zwei Parameter, z. B. die Koordinaten seines Poles auf der Einheitskugel, bestimmt. Es kommen aber drei von diesen Parametern in Fortfall, nämlich die willkürlich zu wählenden Parameter eines „ersten" Ringes und das Azimut, unter dem dieser erste Ring von der Ebene eines „zweiten" Ringes geschnitten wird. Andererseits ist die Anzahl unserer Neigungswinkel ϑ_{jk} gleich $\frac{n(n-1)}{2}$. Nun stimmen die Zahlen

$$2n - 3 \quad \text{und} \quad \frac{n(n-1)}{2}$$

überein für $n = 2$ und $n = 3$. Nur in diesen Fällen können wir die ϑ_{jk} als unabhängige Lagenkoordinaten wählen, während sie für $n > 3$ überzählige Lagenkoordinaten darstellen, zwischen denen Bedingungsgleichungen bestehen. Die Lagrangeschen Gleichgewichtsbedingungen für die ϑ_{jk} lauten nun, da T und U von den ϑ unabhängig sind, für $n \leq 3$ einfach:

$$\frac{\partial V}{\partial\vartheta_{jk}} = \sin\vartheta_{jk}\cdot\cos\vartheta_{jk} = 0.$$

Die Ringe müssen also entweder komplanar ($\sin\vartheta = 0$) oder normal ($\cos\vartheta = 0$) liegen. Indessen gilt dies Resultat, wie hervorgehoben, nur im Falle $n = 2$ oder $n = 3$, wo es unmittelbar aus der Anschauung folgt. Da wir die komplanare Lage aus Stabilitätsgründen ausschlossen, haben wir also das Resultat: zwei oder drei Ringe stellen sich mit ihren Ebenen wechselweise senkrecht gegeneinander. In diesem Falle wird wegen $\cos\vartheta = 0$ nach (19) und (20)

$$V = -\frac{e^2}{8a_0}\sum_{j<k}\sum p_j p_k \frac{a_j^2}{a_k^3},$$

$$A_k = +\frac{3}{8}\sum_{j<k} p_j\left(\frac{a_j}{a_k}\right)^2 - \frac{1}{4}\sum_{j>k} p_j\left(\frac{a_k}{a_j}\right)^3,$$

und es berechnet sich, ähnlich wie am Ende des vorigen Paragraphen:

$$-\frac{W}{Nh} = \sum p_k \frac{Z_k^2}{k^2} + R_1 + R_2, \qquad (21)$$

$$R_1 = \frac{1}{4}\sum_{j<k}\sum p_j p_k \frac{j^4 Z_k^3}{k^6 Z_j^2}, \qquad (22)$$

$$R_2 = -\sum p_k \frac{A_k^2}{k^2}. \qquad (23)$$

Für $n > 4$ wird das Problem der Lagenbestimmung der Ringe unübersichtlich. Zwar lassen sich die erforderlichen Bestimmungsgleichungen unschwer hinschreiben. Ihre Lösung aber ist nicht allgemein durchführbar; vielmehr hängt dieselbe von der Zahl p_k von Ladungseinheiten ab, die wir jedem der Ringe beilegen. Statt des Senkrechtstellens der Ringe tritt nach Maßgabe des Gewichtes, mit dem jeder Ring vermöge seiner Ladungszahl wirkt, eine möglichst senkrechte Stellung aller Ringe gegeneinander. Natürlich ist die komplanare Stellung aller Ringe auch jetzt eine mögliche, aber instabile Auflösung des Gleichgewichtproblems.

Glücklicherweise hängt das Hauptglied des Energieausdrucks, auf das es praktisch allein anzukommen scheint, von der gegenseitigen Lage der Ringe in keiner Weise ab. Der in (13) angegebene Wert desselben behält seine Gültigkeit für beliebig gegeneinander geneigte Ringe; nur die Korrektionen R_1, R_2 hängen von der Lage der Ringe ab. Es hat den Anschein, als ob wir diese Korrektionen und die Lagenbestimmung der Ringe für das Studium der vorliegenden Beobachtungen entbehren können. Daraus folgt zugleich, daß wir über die Lagenanordnung der Ringe aus den Beobachtungen scheinbar nichts erfahren können werden, es sei denn, daß die Beobachtungsgenauigkeit noch erheblich gesteigert wird.

Vom Einfluß der relativistischen Massenveränderung wurde bis hierher abgesehen. Es hat aber keine Schwierigkeit, das Problem beliebig vieler und beliebig geneigter Ringe auch im Sinne der Relativitätstheorie zu behandeln. Als Resultat ergibt sich mit der von mir früher eingeführten, bereits in der Einleitung benutzten Bezeichnung α

$$-\frac{W}{Nh} = \frac{2}{\alpha^2}\sum_k p_k\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{k^2}Z_k^2}\right) + R_1 + R_2$$

$$= \sum \frac{p_k}{k^2} Z_k^2\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\frac{Z_k^2}{k^2} + \frac{\alpha^4}{8}\frac{Z_k^4}{k^4} + \frac{5}{64}\frac{\alpha^6 Z_k^6}{k^6} + \cdots\right) + R_1 + R_2, \qquad (24)$$

$$R_1 = -\sum_{j<k}\sum_{\alpha} c_{jk} p_j p_k \frac{j^4 Z_k^3}{k^6 Z_j^2}\frac{1 - \frac{\alpha^2}{j^2}Z_j^2}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}Z_k^2\right)^{3/2}}, \qquad (25)$$

$$R_2 = -\sum_k \frac{p_k}{k^2}\frac{A_k^2}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}Z_k^2\right)^3}. \qquad (26)$$

Unsere Formel (24) unterscheidet sich von der früheren (13) nur dadurch, daß jetzt Z_k^2 um die aus meiner früheren Arbeit[1]) bekannte Relativitätskorrektion vermehrt ist. Auch die früheren Ausdrücke für R_1 und R_2 sind relativistisch in gewisser Weise zu korrigieren; indessen werden diese Zusatzglieder und a fortiori ihre relativistischen Korrektionen praktisch keine Rolle spielen.

Schließlich muß noch auf eine durchgehende Ungenauigkeit unserer Theorie hingewiesen werden. Indem wir die Ringe als starre Kreise behandeln, geben wir bei komplanarer Lage ihre allgemeine Gestalt richtig wieder. Wir sehen dabei nur von kleinen periodisch wiederkehrenden Einbuchtungen der Bahn ab, die durch die größere oder geringere augenblickliche Entfernung der Ringelektronen von den Elektronen der Nachbarringe hervorgerufen werden. Nicht so bei geneigter Lage der Ringe. Hier wird die Abweichung der Elektronenbahn von der Kreisgestalt eine systematische sein. Z. B. wird bei zwei zueinander senkrechten Ringen der innere Ring abgeplattet sein, da wo er die Ebene des äußeren Ringes schneidet. Es ist nicht versucht worden, den Einfluß dieses Umstandes auf die Energieformel zu ermitteln.

§ 4. Die Linie K_α.

Nach der anschließenden Arbeit von Herrn Kroo wird die Linie K_α mit großer Schärfe dargestellt durch das Schema:

1) Ann. d. Phys. l. c., III, Gl. (10) und II, Gl. (17).

$$\begin{array}{lcc} & K & L \\ \text{Endzustand} & + & \begin{pmatrix} 3 & 8 \end{pmatrix} \\ \text{Anfangszustand} & - & \begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Hier und im folgenden geben die vorangestellten Vorzeichen an, ob die betreffenden Beiträge in die Darstellung der Schwingungszahl positiv oder negativ eingehen.

Wie schon in der Einleitung bemerkt, haben wir den Anfangszustand des L-Ringes und den Endzustand des K-Ringes als die natürliche, mit Elektronen gesättigte Besetzung anzusehen. Wie ebenfalls in der Einleitung begründet wurde, braucht es uns nicht wunder zu nehmen, daß die betreffenden Zahlen (3 und 9) die Periodenzahlen 2 und 8 je um eine Einheit übertreffen.

Nach Debye lautet das Schema für K_α:

$$\begin{array}{lcc} & K & L \\ & + & \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \\ & - & \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Wir wollen zunächst den Grund aufweisen, weshalb auch dieses Schema eine gute Darstellung der Beobachtungen ermöglicht. Wir betrachten zu dem Zwecke, indem wir der bequemeren Schreibweise wegen vorübergehend $p_1 = p$, $p_2 = q$ setzen, das allgemeine Schema

$$\begin{array}{lcc} & K & L \\ & + & \begin{pmatrix} p+1 & q \end{pmatrix} \\ & - & \begin{pmatrix} p & q+1 \end{pmatrix} \end{array},$$

welches ohne Relativität liefert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\nu}{N} = {} & (p+1)(Z-s_{\rho+1})^2 - p(Z-s_\rho)^2 \\ & + \frac{q}{4}(Z-p-1-s_\rho)^2 - \frac{q+1}{4}(Z-p-s_{\rho+1})^2, \end{aligned}\right| \quad (27)$$

oder, nach Potenzen von Z entwickelt:

$$\frac{\nu}{N} = \frac{3}{4}Z^2 - 2Z\left(D_{\rho+1} - \frac{p}{4} + \frac{q - D_{\rho+1}}{4}\right) + \cdots \quad (28)$$

Hier ist die Abkürzung eingeführt

$$D_x = x s_x - (x-1)s_{x-1}.$$

Über den Verlauf von D_x orientiert die folgende Tabelle:

x	s_x	$x s_x$	D_x	$x - D_x + 1$
0	0	0	—	0
1	0	0	0	0,50
2	0,25	0,50	0,50	0,77
3	0,577	1,73	1,23	0,90
4	0,957	3,83	2,10	0,94
5	1,377	6,89	3,06	0,92
6	1,828	10,97	4,08	0,83
7	2,305	16,14	5,17	0,70
8	2,805	22,44	6,30	0,49
9	3,328	29,95	7,51	0,32
10	3,863	38,63	8,68	0,05
11	4,416	48,58	9,95	−0,22
12	4,984	59,80	11,22	−0,66

Sie zeigt in der letzten Spalte ein Maximum für $x = 4$ und gleiche Werte für $x = 8$ und $x = 1$. Man kann daher den gleichen Anstieg von ν wie für $q = 8$ auch erzielen mit dem Werte $q = 1$. Der Debyesche Ansatz benutzt $q = 0$, und die Berechnungen von Kroo zeigen, daß nicht nur im Anstieg, sondern auch in den absoluten Werten von ν die Ansätze $q = 0$ und $q = 8$ nahe übereinstimmen. Dies gilt nicht nur für kleine Werte von Z, sondern auch für große Werte, bei denen die Relativitätskorrektion wesentlich wird. Wenn wir nämlich Gl. (26) um das erste mit $\frac{\alpha^2}{4}$ behaftete Glied der Relativitätskorrektion [vgl. (24)] vervollständigen und dieses nach Potenzen von Z entwickeln, so ergibt sich als relativistische Korrektion von Gl. (28) in erster Näherung

$$\frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{15}{16}Z^4 - 4Z^3\left(D_{\rho+1} - \frac{p}{16} + \frac{q - D_{\rho+1}}{16}\right) + \cdots\right);$$

es tritt also hier dieselbe Verbindung $q - D_{\rho+1}$ auf, wie im Hauptgliede der Formel, woraus sich die genäherte Brauchbarkeit des Debyeschen Ansatzes auch für große Z erklärt.

Unsere Theorie liefert nun insofern eine willkommene Ergänzung der Krooschen Rechnungen, als sie zeigt, daß die dabei nicht berücksichtigten Wechselwirkungsglieder R_1 und R_2 in der Tat vernachlässigt werden dürfen.

Wir zeigen dies in der folgenden Tabelle, in der wir willkürlich die Elemente $Z = 12$, 35, 50 und 74 herausgegriffen haben. In der ersten und zweiten Spalte sind die Energiebeträge $p_1 Z_1^2$ und $p_2 Z_2^2/4$ eingetragen und zwar für den Endzustand des Krooschen Schemas (+) je in der ersten Zeile und für den Anfangszustand (−) in der zweiten. Darunter steht in der dritten Zeile die algebraische Summe beider. In der dritten und vierten Spalte sind die relativistischen Korrektionen angegeben, die zu den betr. Hauptenergiebeträgen hinzukommen und sich (vgl. [24]) aus den einzelnen Summanden

$$p_k \frac{\alpha^2 Z_k^4}{4 k^4}\left(1 + \frac{\alpha^2 Z_k^2}{2 k^2}\left(1 + \frac{5\alpha^2 Z_k^2}{8 k^2} + \cdots\right)\right)$$

zusammensetzen. (Die hier gewählte Schreibweise soll andeuten, wie man am bequemsten rechnet: aus der ersten Relativitäts-Korrektion erhält man die zweite durch Multiplikation mit $\frac{\alpha^2}{2}\frac{Z_k^2}{k^2}$, aus dieser die dritte durch Multiplikation mit $\frac{5\alpha^2}{8}\frac{Z_k^2}{k^2}$). Ein Strich zeigt an, daß die betr. Korrektion nicht in Betracht kommt. In der dritten Zeile ist bei jedem Element wieder die algebraische Summe der darüber stehenden Korrektionen gezogen. Die algebraische Summe

der Hauptglieder und der relativistischen Korrektionsglieder ist in der vorletzten Spalte aufgeführt (unter „ber.") und mit dem Beobachtungswerte von ν/N (unter „beob.", letzte Spalte) zusammengestellt. Die Übereinstimmung liegt bei den drei ersten Elementen vollkommen innerhalb der Beobachtungsfehler und übersteigt auch bei dem letzten Element Wolfram (Messung von de Broglie, mit der Coolidge-Röhre $\lambda_\alpha = 0{,}203 \cdot 10^{-8}$) kaum die Fehlergrenze. Dieses letzte Element, welches bei Herrn Kroo nicht aufgeführt wird, ist durch einen weiten Zwischenraum von den übrigen Elementen, für die die K-Serie bekannt ist, getrennt; es zeigt, daß das Kroosche Schema extrapolierbar ist.

Indessen besteht der Zweck unserer Tabelle nicht in dem Vergleich von Rechnung und Beobachtung. Hierfür würde die Anzahl der herausgegriffenen Beispiele nicht ausreichen; außerdem wird der Vergleich in der nachfolgenden Arbeit von Kroo vollständig durchgeführt. Vielmehr beabsichtigt unsere Tabelle lediglich, die Größe der Wechselwirkungs-Korrektion R_1 festzustellen. Sie ist zerlegt in die Wechselwirkung zwischen dem ersten und zweiten Ring (fünfte Spalte), dem ersten und dritten Ring (sechste Spalte) und dem zweiten und dritten Ring (siebente Spalte). Als Besetzungszahl des dritten Ringes ist dabei $p_3 = 8$ gewählt. (Nur bei Mg hat man offenbar mit

$$p_3 = 1 \quad {}_1Z_3 = 1$$

zu rechnen.) Man könnte noch höhere Wechselwirkungs-Korrektionen in Betracht ziehen, indessen genügen die angeführten bereits, um die allgemeine Behauptung zu erhärten: Die Wechselwirkungs-Korrektionen können praktisch vernachlässigt werden. Sie sind zwar in ihren einzelnen Beträgen keineswegs durchweg klein. Aber ihre Differenz zwischen Anfangs- und Endzustand und erst recht die algebraische Summe der Differenzen der verschiedenen Wechselwirkungs-Korrektionen liegt überall innerhalb der Fehlergrenze.

Dieses Resultat scheint mir sehr befriedigend und für die Einfachheit der Theorie willkommen. Im einzelnen zeigt sich folgendes: Die Wechselwirkung zwischen dem zweiten und dritten Ringe ist unter den hier betrachteten Fällen am größten (wegen des relativ kleinen Abstandes beider Ringe und wegen der großen Besetzungszahlen), sie ist am kleinsten zwischen dem ersten und dritten Ringe (insbesondere wegen des großen Abstandes beider). Dabei kommt die relative Größe der Ringradien zum Ausdruck in dem Zahlenfaktor, den wir früher allgemein j^4/k^6 schrieben. Wie sich hier zeigt, ist die Summe der Wechselwirkungsdifferenzen viel kleiner als ich früher angenommen habe (vgl. den Schluß von § 2).

	$p_1 Z_1^2$	$p_2 \frac{Z_2^2}{4}$	$p_1 p_2 \frac{\alpha^2}{4} Z_1^4 + \ldots$	$p_2 \frac{\alpha^2}{4} Z_2^4 + \ldots$	$p_1 p_3 \frac{1^4}{2^6} Z_1^3 Z_3^3$	$p_2 p_3 \frac{1^4}{3^6} Z_2^3 Z_3^3$	ber.	beob.
Mg, $Z = 12$	$+ 3915$	$+ 76{,}8$	$-$	$-$	$- 0{,}7$	$-$		
	$- 2761$	$- 99{,}9$	$-$	$-$	$- 0{,}6$	$-$		
	$+ 1154$	$- 25{,}1$	$-$	$-$	$- 0{,}1$	$-$	923	921
Br, $Z = 35$	$+ 35547$	$+ 1704{,}7$	$+ 56 + 2$	$+ 5$	$+ 8$	$-$		
	$- 24151$	$- 1080{,}9$	$- 39 - 1$	$- 6$	$- 6$	$-$		
	$+ 11396$	$- 276{,}2$	$+ 18$	$+ 1$	$+ 2$	$-$	880	886
Sn, $Z = 50$	$+ 7328$	$+ 3907$	$+ 237 + 15 + 1$	$+ 25$	$+ 15$	$+ 0{,}6$		
	$- 4050$	$- 1480$	$+ 102 - 11 - 1$	$- 30$	$- 10$	$- 0{,}4$		
	$+ 2378$	$- 582$	$+ 79$	$- 5$	$+ 3$	$-$	1870	1871
W, $Z = 74$	$+ 16173$	$+ 9302$	$1155 + 165 + 30$	$+ 143 + 4$	$+ 22$	$+ 1{,}3$		
	$- 10878$	$- 4660$	$- 784 - 113 - 20$	$- 165 - 5$	$- 17$	$- 0{,}9$		
	$+ 5295$	$- 1307$	$+ 435$	$- 23$	$+ 5$	$-$	4400	4490

und kann die Wasserstoff-Unähnlichkeit der höheren Röntgenspektren kaum erklären. Unsere Korrektion R_1 ist ohne Rücksicht auf die Relativität berechnet, die offenbar an der ohnehin verschwindenden Größenordnung nichts ändern kann. Von der Korrektion R_2, die ihrerseits von kleinerer Größenordnung wie R_1 ist, ist ganz abgesehen worden; Einzelberechnungen zeigten, daß dies berechtigt war.

Insbesondere bestätigen die Erfahrungen bei K_α, daß wegen des Verschwindens der Wechselwirkungs-Korrektionen über die gegenseitige Lage des K- und L-Ringes (ob in gleicher Ebene oder in zueinander senkrechten) aus K_α nichts zu erfahren ist.

(Eingegangen 6. April 1918.)

Der erste und zweite Elektronenring der Atome.

Von Jan Kroo.

Der älteste modellmäßige Ansatz der Quantentheorie der Hochfrequenzspektra beruht auf der Annahme, daß auf einer Bohrschen Quantenbahn mehrere Elektronen kreisen, und daß der Strahlungsvorgang durch den Sprung aller Elektronen, aus einem Außenringe in einen Innenring erzeugt wird[1]). Auf Grund dieser Vorstellung erhält bekanntlich Moseley eine roh angenäherte Darstellung für die Hauptlinie der K-Serie, indem er ihre Entstehung dem Übergange von 4 Elektronen, aus dem zweiquantigen in den einquantigen Kreis, zuschreibt. Befriedigender aber wird der Bau der K_α-Serie durch den Gesichtspunkt wiedergegeben, daß der Strahlungsvorgang ausgelöst wird, indem nur ein einziges[2]) Elektron, von der zweiquantigen auf die einquantige Bahn, überspringt. Es zeigt sich dann in der Tat, wie Debye[3]) nachgewiesen hat, daß die Annahme von 3 Elektronen, im Normalzustande auf dem einquantigen Bohrschen Kreise, zu einer K_{α_1}-Darstellung führt, die fast ebensogut ist, wie die empirische Formel, welche Sommerfeld auf Grund seiner tiefsinnigen Untersuchungen über die Feinstruktur der Röntgenspektra angegeben hat[4]).

Das Bedürfnis nach besseren Seriendarstellungen empfiehlt indessen — wie wir durch die folgenden Überlegungen dartun möchten — den Ausgangspunkt zu verallgemeinern. Wir bilden uns daher die recht nahe liegende Vorstellung, daß alle Bohrschen Kreise mit Elektronen beladen sind. Das Zentralproblem ist dann, die Anzahl der Elektronen auf den Ringen aus der Beobachtung zu entnehmen. Inwieweit unser Standpunkt / die Theorie der Röntgenspektra verbessert, möge an dieser Stelle nur für die K_{α_1}-Serie untersucht werden. Wir schreiben sie dem Spiele eines Elektrons zwischen dem ein- und zweiquantigen Kreise zu, und dürfen daher von ihr näheren Aufschluß über die beiden innersten Ringe erwarten.

Auf die K_{α_2}-Linie gehen wir im folgenden nicht ein. Sie gehört vor das Forum der Sommerfeldschen Feinstruktur-Theorie, welche in der vorangehenden Arbeit durch die Vorstellung „eines Ellipsenvereins" und die zugehörigen strengen Lösungen des n-Körper-Problems bereichert wird. Die Entstehung von K_{α_2} wird nämlich durch den Umlauf auf Ellipsenbahnen bedingt, welche durch die Elektronen so beschrieben werden, daß deren Verbindungslinien dauernd ein reguläres sich ähnlich bleibendes Polygon bilden, in dessen Mittelpunkte der Kern liegt.

§ 1. Berechnung der Frequenz.

Es trage in der Normalanordnung der erste Bohrsche Quantenkreis, K-Kreis, k Elektronen, der zweite Bohrsche Kreis, L-Kreis, l Elektronen, in gleichen Winkelabständen voneinander. Die Wechselwirkung zwischen den Ringen berechnen wir so, als wäre die elektrische Ladung gleichmäßig auf den Ringen verteilt, und als wäre der Radius b des äußeren Ringes im Verhältnis zu a, demjenigen des inneren Ringes, so groß, daß man in den Entwicklungen des Potentials der Ringbelegung nach Kugelfunktionen die Glieder zweiter und höherer Ordnung in $\frac{a}{b}$ vernachlässigen dürfte. Dies entspricht der ersten Approximation im Sinne der von Sommerfeld ausgearbeiteten Behandlung des Atomfeldes[1]), und kommt auf die Annahme hinaus, daß einerseits das System Kern und K-Ring nach außen hin so wirkt, wie ein durch die K-Ring-Ladung abgeschirmter Kern, und daß andererseits der L-Ring nach innen zu keine Kraft ausübt. Wir haben somit für jedes Elektron auf dem K-Kreise die Bedingung

$$\frac{Z \cdot e^2}{a^2} - \frac{s_k \cdot e^2}{a^2} = \frac{m v_a^2}{a}, \qquad (1)$$

welche ausdrückt, daß sich die Anziehung des

1) H. Moseley, Phil. Mag. **26**, 1024, 1913.
2) Eine andere Auffassung vertritt Vegard, Verh. d. D. Phys. Ges. 1917.
3) Debye, diese Zeitschr. **18**, 276, 1917.
4) Sommerfeld, Ann. d. Phys. **51**, 1, 1916.

1) Sommerfeld, Münch. Ber. 1916, S. 155 und 175.

Kernes und die Abstoßung der übrigen Elektronen des K-Kreises mit der Zentrifugalkraft das Gleichgewicht halten. Dabei bedeuten: Z die Ordnungszahl des Atoms, e Ladung, m Masse des Elektrons, a den Radius des Kreises, v_a die Umlaufsgeschwindigkeit. Die Funktion s_k kommt schon bei Bohr vor und ist dort tabelliert[1]). Es ist bekanntlich

$$s_k = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\sin i\frac{\pi}{k}}.$$

Für ein Elektron auf dem L-Kreise, dessen Radius b sei, ist dagegen

$$\frac{(Z-k)\,e^2}{b^2} - \frac{s_l e^2}{b^2} = \frac{m v_b^2}{b}, \qquad (2)$$

unter v_b die Umlaufsgeschwindigkeit auf dem L-Kreise verstanden, da jetzt der Kern durch k Elektronen abgeschirmt ist. Außerdem gilt nach der quantentheoretischen Forderung, unter h das Wirkungsquantum verstanden,

$$m v_a \cdot a = \frac{h}{2\pi}, \qquad (3)$$

für jedes Elektron auf dem K-Kreise,

$$m v_b b = 2\cdot\frac{h}{2\pi} \qquad (4)$$

für jedes Elektron auf dem L-Kreise. Berechnen wir a und v_a aus (1) und (3), und führen wir sie in den Ausdruck für die Gesamtenergie der k Elektronen des K-Kreises

$$W_K = \frac{m v_a^2}{2}k - \frac{(Z-s_k)e^2}{a}k,$$

ein, so ergibt sich

$$W_K = N h k (Z-s_k)^2, \qquad (5)$$

wenn

$$N = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \qquad (6)$$

die Rydbergsche Konstante bedeutet. Ähnlich folgt für die Gesamtenergie der l Elektronen auf dem L-Kreise

$$W_L = \frac{N h l}{4}(Z-k-s_l)^2. \qquad (7)$$

Nach (5) und (7) berechnet sich also die gesamte Energie des Ringsystems

$$W = W_K + W_L$$

zu

$$W = N h\left\{k(Z-s_k)^2 + \frac{l}{4}(Z-k-s_l)^2\right\}. \qquad (8)$$

Nun soll sich der Vorgang der K_α-Emission zwischen dem K- und L-Ringe abspielen, indem der Zustand, in welchem die Anzahl der Elektronen auf dem K-Kreise um eine Einheit abgenommen, diejenige auf L um eine Einheit zugenommen hat, wieder in den Normalzustand zurückfällt. Ist also W die Energie bei ersterer Konstellation der Elektronen,

$$W = N h\left\{(k-1)(Z-s_{k-1})^2 + \frac{l+1}{4}(Z-k+1-s_{l+1})^2\right\}, \qquad (9)$$

so wird nach dem Bohrschen Ansatze die Frequenz der ausgelösten Strahlung

$$\nu = \frac{W-W}{h}. \qquad (10)$$

Aus (8), (9) und (10) ergibt sich

$$\frac{\nu}{N} = k(Z-s_k)^2 + \frac{l}{4}(Z-k-s_l)^2 - (k-1)(Z-s_{k-1})^2 - \frac{l+1}{4}(Z-k+1-s_{l+1})^2 \quad \ldots \quad (11)$$

Von den Elektronen auf den übrigen Bohr-Kreisen durfte abgesehen werden, da ihre Energie unverändert konstant bleibt.

Beziehung (11) schreiben wir mit Benutzung der Bezeichnungen

$$A = \frac{\nu}{N} - \frac{3}{4}Z^2, \quad \ldots \qquad (12)$$

$$\begin{aligned} A_n &= 2n s_n - 2(n-1)s_{n-1} - \frac{n-1}{2}, \\ B_n &= \frac{n}{2}(s_n+1) - \frac{n+1}{2}s_{n+1}, \\ C_n &= n s_n^2 - (n-1)s_{n-1}^2 - \frac{(n-1)^2}{4}, \\ D_n &= \frac{n}{4}(s_n^2-1) + \frac{n+1}{4}s_{n+1}(2-s_{n+1}), \end{aligned} \qquad (13)$$

in der Form

$$A = -(A_k + B_l)Z + C_k + D_l + k B_l. \qquad (14)$$

Das zweite Glied in der Klammer, sowie der vorletzte und letzte Term bedeuten die „Korrektion", welche der zweiquantige Ring an der Debyeschen Formel anbringt. Diese geht aus (14) für $l = 0$ hervor. Die Funktionen (13), für einige n-Werte berechnet, sind in Tabelle I ein-

Tabelle I.

n	A_n	B_n	C_n	D_n
1	0	0,25	0	0,031
2	0,5	0,3839	— 0,25	0,147
3	1,1641	0,4518	— 0,125	0,498
4	2,0927	0,4732	0,414	0,990
5	4,0710	0,4588	1,805	1,592
6		0,4152	4,313	2,284
7		0,3472	8,149	3,051
8		0,2436	13,503	3,702
9		0,101		4,078

1) Bohr, Phil. Mag. 1913. S. 482. Man vergleiche auch Debye l. c.

getragen. A_n und C_n kommen schon bei Debye vor, wo sie bzw. mit B_s und C_s bezeichnet sind.

Wir wenden uns jetzt zur Aufgabe, aus den Beobachtungen über Schwingungszahlen die Elektronenbelegung des K- und L-Ringes zu entnehmen. Um zunächst einen ungefähren Anhaltspunkt zu bekommen, betrachten wir die 3 ersten Werte der Δ, welche aus den Messungen von Moseley, Siegbahn[1]) u. a. hervorgehen, und nach (12) durch Debye berechnet wurden. Sie sind in Spalte 2 der Tabellen III und IV fast für alle Elemente von Na bis Nd (mit einigen Berichtigungen) angeführt[2]). Der Berechnung ist der Wert

$$N = 109740$$

in Wellenzahlen zugrunde gelegt worden.

Für

$$Z = 11, \quad 12, \quad 13$$

beträgt Δ, bzw.

$$\Delta = -14{,}5 \quad -16{,}1 \quad -17{,}7.$$

Wir folgern hieraus, daß im Mittel ungefähr

$$\frac{\partial \Delta}{\partial Z} = -1{,}59 \qquad (15)$$

sein mußte. Aus (14) ergibt sich aber

$$\frac{\partial \Delta}{\partial Z} = -(A_k + B_l).$$

Nehmen wir jetzt Tabelle I zu Hilfe, so finden wir, daß man mit

$$A_3 + B_9 = -1{,}625$$

dem beobachteten Werte (15) am nächsten käme. Um näheren Aufschluß über unseren vorläufigen Befund

$$k = 3, \qquad l = 9 \qquad (16)$$

zu erhalten, stellen wir uns die bezügliche Δ-Formel her. Nach (14) folgt für

$k = 3,\ l = 9$: $\Delta = -1{,}6251\, Z + 5{,}036$. (17)

Wir stellen daneben noch die Formeln für

$k = 3,\ l = 8$: $\Delta = -1{,}7077\, Z + 4{,}398$ (18)

und

$k = 3,\ l = 7$: $\Delta = -1{,}8113\, Z + 3{,}947$. (19)

Eine Probe der nach (17)—(19) berechneten $-10\cdot\Delta$-Werte enthält Tabelle II. In der ersten Spalte stehen die Ordnungszahlen der Atome, in der zweiten die beobachteten $-10\cdot\Delta$. Außerdem sind angeführt: die $-10\cdot\Delta$-Werte, berechnet nach der von Debye vorgeschlagenen Formel

$$\Delta = -1{,}4641\, Z - 0{,}125;$$

welche aus der Vorstellung eines einquantigen Dreierringes gewonnen wurde, sowie auch berechnet nach der empirischen Formel von Sommerfeld:

$$\frac{\nu}{N} = \frac{(Z-1{,}6)^2}{1^2} - \frac{(Z-3{,}5)^2}{2^2}.$$

Tabelle II.

Z	$-10\,\Delta$ beob.	$-10\,\Delta$ ber. nach (14) $k=3,\ l=7$	$k=3,\ l=8$	$k=3,\ l=9$	$-10\,\Delta$ Debye	$-10\,\Delta$ Sommerfeld
11	145	159,7	143,8	128,4	162	164
12	161	177,8	160,9	144,6	177	179
13	177	195,99	178,0	160,9	192	193

Wie man sieht, ergibt

$$k = 3, \quad l = 8,$$

also die Annahme eines einquantigen Dreierringes und eines zweiquantigen Achterringes einen recht guten Anschluß an die Erfahrung. Für höhere Ordnungszahlen der Atome ist die Berücksichtigung der relativistischen Massenveränderlichkeit unumgänglich.

§ 2. Berücksichtigung der Massenveränderlichkeit.

Dies führt uns dazu an Stelle von (1) und (3) zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,\frac{v^2}{a} &= \frac{(Z-s_k)e^2}{a^2}, \\ \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,v a &= \frac{h}{2\pi}, \end{aligned}\right| \qquad (20)$$

wo m die Ruhmasse, c die Lichtgeschwindigkeit, v die Umlaufsgeschwindigkeit ist. Der relativistische Ausdruck für die Energie eines Elektrons auf dem K-Kreise lautet

$$W = m c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) - \frac{(Z-s_k)e^2}{a}.$$

Führen wir hierin a und v aus (20) ein, so resultiert

$$W = -\frac{2hN}{\alpha^2}\left(1 - \sqrt{1-\alpha^2(Z-s_k)^2}\right), \qquad (21)$$

wo N die Rydbergsche Konstante (6) bedeutet, und

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{c\,h}$$

ist. Die Größe α ist auch für die Theorie der Feinstruktur der Spektra wichtig. Den Rechnungen werden wir den Sommerfeldschen Wert

$$\alpha^2 = 5{,}3 \cdot 10^{-5}$$

zugrunde legen[1]). Ähnlich folgt für ein Elek-

1) Zusammengestellt bei Siegbahn, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 296, 1916 und Wagner, diese Zeitschr. 18, 495, 1917.

2) Vgl. Debye l. c.

1) Vgl. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51, 1, 1916.

tron auf dem zweiquantigen L-Kreise der Energieausdruck

$$W' = -\frac{2hN}{a^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}(Z-k-s_l)^2}\right). \quad (22)$$

Nach (21) und (22) ist also die Gesamtenergie der k Elektronen des K-Kreises und der l Elektronen des L-Kreises

$$W = -\frac{2hN}{a^2}\left\{k\left(\sqrt{1-a^2(Z-s_k)^2}\right)\right. \\ \left. + l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}(Z-k-s_l)^2}\right)\right\} \quad (23)$$

während bei einer Elektronenanordnung, in welcher k und l um eine Einheit bzw. ab- und zugenommen haben, die Energie

$$\overline{W} = -\frac{2hN}{a^2}\left\{(k-1)\left(1 - \sqrt{1-a^2(Z-s_{k-1})^2}\right)\right. \\ \left. + (l+1)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}(Z-k+1-s_{l+1})^2}\right)\right\} \\ \ldots \quad (24)$$

ist. Führen wir noch die Bezeichnungen

$$F_1 = (Z - s_{k-1})^2$$
$$F_2 = \left(\frac{Z-k+1-s_{l+1}}{2}\right)^2$$
$$F_3 = (Z - s_k)^2$$
$$F_4 = \left(\frac{Z-k-s_l}{2}\right)^2$$

ein, so folgt aus (10), (23) und (24)

$$\frac{\nu}{N} = \frac{2(k-1)}{a^2}\sqrt{1-a^2F_1} + \frac{2(l+1)}{a^2}\sqrt{1-a^2F_2} \\ - \frac{2k}{a^2}\sqrt{1-a^2F_3} - \frac{2l}{a^2}\sqrt{1-a^2F_4} \\ \ldots \quad (25)$$

Nach Potenzen von a^2 entwickelt, ergibt (25)

$$\frac{\nu}{N} = \left[-(k-1)F_1 - (l+1)F_2 + kF_3 + lF_4\right] \\ + \frac{a^2}{4}\left[-(k-1)F_1^2 - (l+1)F_2^2 + kF_3^2 + lF_4^2\right] \\ + \frac{a^4}{8}\left[-(k-1)F_1^3 - (l+1)F_2^3 + kF_3^3 + lF_4^3\right] \\ + \frac{5a^6}{64}\left[-(k-1)F_1^4 - (l+1)F_2^4 + kF_3^4 + lF_4^4\right] \\ + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \ldots \quad (26)$$

Für die numerische Rechnung bis $Z = 60$ genügt es, die 4 angeschriebenen Glieder zu gebrauchen. Der Fehler, den wir damit begehen, kommt bei der hier benutzten Genauigkeit nicht zum Vorschein.

Mit $c = \infty$, also $a = 0$ reduziert sich offenbar (26) auf die in § 1 abgeleitete Formel (11), welcher wir die Gestalt (14) gegeben haben. Führen wir also die Bezeichnung

$$\Delta = \frac{\nu}{N} - \frac{3}{4}Z^2$$

ein, und verstehen wir unter Δ^0 den Ausdruck (14)

$$\Delta^0 = -(A_k + B_l)Z + C_k + D_l + kB_l, \quad (27)$$

so können wir (26) auch in der Form schreiben

$$\Delta = \Delta^0 + R, \quad (28)$$

unter R die Relativitätskorrektion verstanden.

§ 3. Vergleich mit der Erfahrung.

Mit Hilfe der Formel (26) soll nun die Vorstellung des einquantigen Dreierringes und des zweiquantigen Achterringes, zu der wir in § 1 gelangt sind, der weiteren Prüfung unterzogen werden. Dies soll zunächst bis $Z = 38$ geschehen. Das Ergebnis der Rechnung ist in Tabelle III angeführt. Zusammengestellt sind dort: die Ordnungszahl Z, die beobachteten $-\Delta$-Werte, die nach (25) berechneten, mit $k=3$, $l=8$, die Abweichung zwischen den beobachteten und berechneten $-\Delta$, und schließlich die $-\Delta$ berechnet nach der Debyeschen, sowie nach der Sommerfeldschen Formel. Erstere geht aus (25) hervor, indem man $k=3$, $l=0$ setzt; letztere lautet

$$\frac{\nu}{N} = \frac{2}{a^2}\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}(Z-3{,}5)^2}\right. \\ \left. - \sqrt{1 - a^2(Z-1{,}6)^2}\right)$$

Tabelle III.

Z	$-\Delta$ beob.	$-\Delta$ berech. nach (25) für $k=3$, $l=8$	Abweichung	$-\Delta$ Sommerfeld	$-\Delta$ Debye
11	14,5	14,3	0,2		
12	16,1	15,9	0,2		
13	17,7	17,5	0,2		
14	19,2	19,2	0,0		
15	21,0	20,7	0,3	21,5	22,3
16	21,99	22,3	− 0,31		
17	23,3	23,8	− 0,5		
19	26,7	26,8	− 0,1		
20	28,4	28,2	0,2	29,1	27,6
21	29,8	29,5	0,3		
22	30,7	30,8	− 0,1		
23	31,9	32,0	− 0,1		
24	33,0	33,2	− 0,2		
25	33,3	34,2	− 0,9	33,2	31,4
26	34,4	35,2	− 0,8		
27	35,1	36,1	− 1,0		
28	36,7	36,9	− 0,2		
29	38,6	37,5	1,1		
30	39,1	38,1	1,0	35	33,5
32	43,1	38,8	4,3		
33	37,9	38,9	− 1,0		
34	41,6	38,8	2,8		
35	38,3	38,6	− 0,3	34,9	33,1
37	38,4	37,7	0,7		
38	36,8	36,8	0,0		

Die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Δ-Werten kann für

die Mehrzahl der Atome recht gut, in den 7 Fällen dagegen, wo die Abweichung ungefähr eine Einheit beträgt, noch immer gut genannt werden. Die Vorstellung des einquantigen Dreierringes und des zweiquantigen Achterringes bewährt sich hier aufs beste. Die beiden größeren Abweichungen, welche bei $Z=32$ und 34 vorkommen, fallen deutlich aus dem allgemeinen Gange der beobachteten Δ-Werte heraus.

Die Fortsetzung der Atomreihe enthält Tabelle IV, welche in Spalte 2 die beobachteten,

Tabelle IV.

Z	$-\Delta$ beob.	$-\Delta$ berechnet nach (25) für $k=3$, $l=8$	$-\Delta$ Sommerfeld	$-\Delta$ Debye
39	50	30		
40	44	34	30	29
41	44	33		
42	40	31		
44	39	27		
45	37	24	20	20
46	33	21		
47	35	18		
48	34	14		
49	14	10		
50	4	5	0	— 2
51	4	0,6		
53	22	— 10		
55	— 21	— 23	— 31	— 26
56	3	— 31		
57	— 13	— 39		
58	— 44	— 47		
59	— 53	— 56		
60	— 01	— 66	— 74	— 77

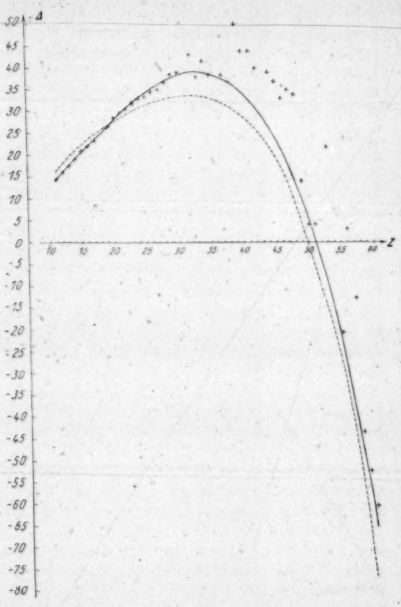
in Spalte 3 die bei Zugrundelegung des einquantigen Dreierringes und zweiquantigen Achterringes berechneten $-\Delta$ enthält. Für $Z=50$ und 55, sowie für die 3 letzten Ordnungszahlen erreicht die Übereinstimmung zwischen den beiden Zahlenreihen nicht mehr den früheren Genauigkeitsgrad; sie ist aber immerhin noch bemerkenswert. Für die übrigen Z kommen zwar schon erhebliche Abweichungen, aber der Vorzug der Formel (25) gegenüber den Formeln von Sommerfeld und Debye ist nicht zu verkennen. Es ist im übrigen zu bemerken, daß die beobachteten Δ außerhalb einer möglichen Kurve zu liegen scheinen.

Die Verbesserung, welche durch Hinzunahme des zweiquantigen Achterringes zum einquantigen Dreierring erzielt wird, möge schließlich durch das beigefügte Kurvenbild veranschaulicht werden. Die gestrichelte Kurve entspricht der Debyeschen Formel, also unserer Formel (25) für

$$k=3, \quad l=0,$$

die ausgezogene Kurve der Formel (25) für

$$k=3, \quad l=8.$$



Die beobachteten $-\Delta$-Werte sind als Kreuze eingetragen.

Zusammenfassung.

Aus der theoretischen Verwertung der K_{α_1}-Serie entnimmt man, daß der einquantige Ring 3 Elektronen, der zweiquantige Ring 8 Elektronen enthält.

Krakau, März 1918.

(Eingegangen 5. April 1918.)

Die Theorie der Formatreform.

Von W. Porstmann.

Das Kgl. Fabrikationsbureau in Spandau sah sich genötigt, Normen für die gesamte deutsche Industrie aufzustellen, um die Deckung des Bedarfs an Heeresgerät aller Art in der für den Bestand des Reiches notwendigen Menge zu sichern. Zunächst handelte es sich um Normen für den deutschen Maschinenbau. Schrauben, Keile, Muttern, Bohrungen, Bolzen, Zeichnungen, kurz die Elemente der Maschinen und Geräte waren bisher wohl inner-

halb der einzelnen Werke vereinheitlicht, die Zusammenfassung vieler Einzelwerke zur Lieferung der Elemente an Zentralstellen für Heeresgerät aber brachte die Zersplitterung der Werke untereinander als größtes Hindernis zur Betonung. Die Schrauben des einen Werkes paßten nicht zu den Gewinden des andern usw. Es wurden dann vom Verein deutscher Ingenieure Normalien ausgearbeitet. Notwendig berührten diese Normierungen auch Gebiete außerhalb des Maschinenbaues, der Interessentenkreis wurde immer größer, Behörden, technische und industrielle Verbände schlossen sich an, machten andererseits aber auch ihre Einwände und neue Vorschläge geltend, so daß die Normierung immer schwieriger wurde. Augenblicklich umfaßt der „Normenausschuß für die deutsche Industrie" die hauptsächlichsten Behörden (Reichsmarineamt, Reichspostamt, viele Ministerien u. a.) wie auch die maßgebendsten technischen und industriellen Werke und Verbände Deutschlands. Aber eben diese umfassende Stellung machte die Normierung immer verwickelter, da sie immer objektiver zu gestalten war. Dieser Umstand führte schließlich zur Forderung wissenschaftlicher Grundlagen für die einzelnen Normierungen, denn nur dann besteht Aussicht, daß sie allgemein unter Hintanstellung von Einzelinteressen angenommen werden.

Wir wollen uns hier mit der Aufstellung von Normen für die Formate beschäftigen. Als hauptsächlichste Vorarbeiten wissenschaftlicher Art auf diesem Gebiete kommen in Frage die Ergebnisse der von Wilhelm Ostwald seinerzeit geleiteten „Brücke" in München, Institut zur Organisation der geistigen Arbeit, wie die vom Verfasser in seiner „Normenlehre" gegebenen theoretischen Klärungen. Die praktische Technik brachte indes so viele neue Gesichtspunkte zu einzelnen der dort behandelten Probleme, daß eine den erweiterten Ansprüchen gerecht werdende Fortsetzung dieser Arbeiten nach der wissenschaftlichen Seite dringend notwendig geworden ist, wenn die Arbeiten des Normenausschusses sich nicht zersplittern und ergebnislos verlaufen sollen.

Es handelt sich um Normen für Längen, für rechteckige Flächen und rechteckige Räume. Der nächstliegende Gedankengang ist nun der: wenn wir Längennormen aufstellen wollen, so schließen wir uns an das Längenmaßsystem an. Dies gibt uns als Haupttype das Meter. Als Längenmaße werden die millesimalen Ableitungen benutzt: $\mu\mu$, μ, mm, m, km. Damit haben wir abgeleitete Längentypen. Die Wissenschaft benutzt noch das Zentimeter, die Technik allerdings fast nicht. Es können aber auch die gesamten dezimalen Ableitungen als Typen benutzt werden. Und somit kann grundsätzlich „die dezimale Ableitung" als Prinzip zur Gewinnung verschiedener Typen aus der Hauptnorm Meter festgestellt werden. Auf diese Weise würde auch der beste Anschluß an unser Zahlensystem erreicht. Was die rechteckigen Flächen anlangt, so wird man zunächst schließen: Flächen beurteilen oder messen wir nach Länge und Breite, also haben wir im Quadrat mit der Längeneinheit als Kante die nächstliegende Rechteckstype. Das Quadratmeter ist die Urtype der Flächen. Abgeleitete Flächentypen gewinnen wir ähnlich oder genau so, wie wir die Flächenmaße ableiten. Und wir stellen so letzten Endes die Flächenmaße als längst vorhandene Flächentypen auf. Derselbe Gedankengang wiederholt sich für den Raum. Den rechteckigen Raum beurteilen wir nach Länge, Breite und Tiefe, also ist das Kubikmeter die Haupttype für den Raum, und Ableitungen lassen sich etwa so gewinnen, wie die jetzigen metrischen Raummaße gewonnen sind.

Mit dieser Schlußfolgerung sind wir aber nicht über die Typen des metrischen Maßsystems hinausgekommen. Es sind Maße aufgestellt, aber keine Formattypen. Es sind mit andern Worten grundsätzlich neue logische Elemente zur Gewinnung von Typen für die Technik, für Handel und Industrie, für die Volkswirtschaft notwendig. Naturgemäß ist das Quadrat eine Flächentype, der Würfel eine des Raumes, aber diese Typen sind zur Befriedigung vieler Bedürfnisse unbrauchbar, sie sind die Formentypen für Meßzwecke, aber nicht für Gebrauchszwecke.

Die Längennormen sollen zur Beseitigung willkürlicher und zersplitternder Freiheiten bei der Festlegung von Längen irgendwelcher Art dienen, z. B. bei langen Waren, die hauptsächlich durch das Überwiegen der einen Dimension in ihrer Gestalt bestimmt sind, während der Querschnitt die verschiedensten Gebrauchs- und Herstellungsformen haben kann. Prüfen wir hier die durch die dezimale Ableitung aus der Längeneinheit gewonnene Reihe, so ergeben sich ihre Zwischenräume teilweise als zu groß. Mit einer auf Zehn aufgebauten Potenzreihe ist der Praxis nicht gedient. Zwischen 1 m und 10 m benötigt sie Zwischennormen, erst recht zwischen 1 mm und 10 mm. Dagegen werden Normen zwischen 100 m und 1000 m für die Praxis kaum erforderlich sein, von wenigen Spezialfällen abgesehen, die aber wohl auch durch technische Momente endgültig geregelt werden. Ebensowenig werden Zwischennormen zwischen 1 $\mu\mu$ und 1 μ erforderlich sein, die

ja beide durch den Anschluß der Längenmessung an das Zahlensystem bedingt sind, aber nicht als praktische Maßstäbe im Alltag benutzt werden. Die Meßtechnik benutzt überhaupt, um dies nochmals zu betonen, nicht dezimal, sondern millesimal abgestufte Maße.

In erster Annäherung ist allgemein die arithmetische Reihe für unseren Zweck zu untersuchen. Für einen kleinen Bereich ist sie offenbar brauchbar. In zweiter Annäherung liefert die geometrische Reihe für einen größeren Bereich typische Längen. Aber auch sie ist, soweit sich schon jetzt sagen läßt, kaum für den Gesamtbereich brauchbar, selbst bei günstigster Wahl der Basis und des Exponenten. — Es soll am Schluß noch einmal auf diese Frage zurückgekommen werden.

Die Normierung der Flächen ist erheblich weiter gediehen als die der Längen; von ihr geht die Formatreform aus in ihrer Entwicklung. Die „Brücke" vertrat bestimmte Flächenformate, die Normierung des Raumes schloß sich dann als unvermeidbar an und zuletzt wurde von technischer Seite die Regelung derselben Frage auch für die Längen gefordert. Zur Auswahl bestimmter Formate werden schließlich als Ergebnis der vielerlei Einzelvorschläge folgende Grundsätze aufgestellt:

1. Die Formate sollen einander geometrisch ähnlich sein.
2. Die Formate sollen durch Halbierung (oder Verdoppelung) auseinander hervorgehen.
3. Zur Gewinnung einer Ausgangsnorm ist eine quantitative Bestimmung nötig: Anschluß an das metrische System.

Diese Sätze gelten für alle drei Bereiche, sie sollen gewissermaßen die Grundlage abgeben, auf die sich alle nötigen Ergänzungen aufbauen können. Der erste Satz enthält das Ähnlichkeitsprinzip. Es ist dies ein vielfach als selbstverständlich angenommenes ökonomisches Prinzip der Technik, ja streng genommen des gesamten Naturhaushaltes, das erst in den letzten Jahren in den Bewußtseinshorizont der Menschheit hereingerückt ist. Es ist das zweite Fundamentalprinzip der Technik. Das erste ist das Gleichheitsprinzip. Unsere Maschinenarbeit wie überhaupt jede geregelte Tätigkeit beruht in erster Linie darauf, daß etwas wiederholt getan oder angefertigt wird. Eine Maschine liefert lauter gleiche Stücke; auch die Tätigkeit der Handwerker, ja der gesamten Natur ist in erster Annäherung durch die Wiederholung ein und derselben Arbeit charakterisiert. Die Technik hat dies Prinzip bewußt bis zum genauesten Extrem ausgebeutet. Da aber, wo eine Wiederholung der gleichen Form und Größe nicht erwünscht ist, weil sie das gesetzte Ziel nicht erreichen läßt, dort müssen neue Prinzipien in der Auswahl der Formen eingreifen. Wo wir auch hinsehen, tritt hier das zweite ökonomische Prinzip in Kraft, das der Ähnlichkeit. Es wird die Größe variiert, aber die Form beibehalten. Die Größe kann nicht gleich bleiben, weil sonst das Gleichheitsgesetz schon alle Bedürfnisse befriedigen würde. Die Beibehaltung der Form gestattet eine weitgehende Beibehaltung auch der Herstellungsweise, des Gebrauchs, kurz des Umganges eben mit dieser Form. Mit der Beibehaltung der Form ist vielfach die des Stoffes verbunden. Als Beispiele für die Wirksamkeit des Ähnlichkeitsprinzips seien erwähnt: dieselbe Form der Flächenmaße, der Raummaße (das Quadrat, der Würfel); ein Gewichtssatz enthält im allgemeinen verschieden große Gewichte gleicher Form. Überhaupt ist der Begriff des „Satzes" das Zeichen der Ähnlichkeit. Die Münzen haben bei verschiedener Größe geradezu internationale Gleichheit der Form. — Wenn man will, kann man auch das Ähnlichkeitsprinzip als eine Modifikation des der Gleichheit ansehen: Gleichheit der Form ist gewahrt. Doch soll dieser Gedanke nicht weiter ausgesponnen werden. — Die Blätter eines Baumes haben durchgängig dieselbe Form; eine Tierart hat und erzeugt dieselbe Form von Tieren. Die Himmelskörper haben annähernd die gleiche Form. Die Technik hat sich des Prinzips schon seit langem bemächtigt. Die Geschosse, vom Infanteriegeschoß bis zur Riesengranate, haben in erster Annäherung gleiche Form. Eine Motortype wird in verschiedenen Größen, aber gleicher Form geliefert. Es bedarf also kaum noch weiterer Begründung, daß und warum dieses Ähnlichkeitsprinzip als erster Grundsatz zur Normierung der Formate aufgestellt wurde. (Da eine jede Gerade der andern geometrisch ähnlich ist, fallen die Längennormen von allein in den Wirkungsbereich des Prinzips.)

Auch der zweite Grundsatz entspringt der technischen Praxis. Das Halbieren eines Körpers oder Verdoppeln durch Aneinanderlegen zweier gleicher Körper kommt so oft im praktischen Leben vor, daß der Satz eine nähere Begründung überflüssig macht. Ist uns ein Stück Papier zu groß, so falzen wir es auf die Hälfte. Die Halbierung ist die primitivste und sicherste Teilung, die wir vornehmen können, weit sicherer als etwa die Drittelung. Zu bemerken ist aber, daß wir uns hier von der dezimalen Teilung entfernen, die im Zahlensystem vorherrschend geworden ist. Wir bleiben wohl bei der Potenzreihe, aber nicht bei der mit der

Basis 10, sondern 2. Dies ist ein grundsätzlicher Unterschied zwischen den Maßen und den Formaten. Letztere sind Objekte der Praxis, für sie kommt einzig und allein die fortgesetzte Hälftelung in Frage. Die Maßpotenzreihe benutzt außerdem noch die Fünftelung, im ganzen also die dezimale Ableitung. Die Gründe hierfür sind theoretischer Natur und nicht maßgebend für die Praxis. Auch irgendwelche Widersprüche sind nicht zu erwarten, wenn hier die Zweierpotenzen, dort die Zehnerpotenzen benutzt werden. Denn unsere Formate stehen in keinerlei Berührung mit den Maßen, auch werden ihre Abmessungen in keiner Weise maßtechnisch benutzt, so daß Konflikte mit der Zahlenreihe entstehen könnten.

Auf Grund der beiden ersten Sätze lassen sich alle Verhältnisse der Formate festlegen. Für die Längen gelten beide Sätze fast selbstverständlich, hier werden die grundlegendsten Ergänzungen notwendig sein, um eine brauchbare Auswahl bereitzustellen. Für die Flächen ergibt sich die Frage: Welches Seitenverhältnis muß ein Rechteck haben, so daß seine Hälfte ihm wieder geometrisch ähnlich ist. Die Ausrechnung ergibt, daß sich die kurze Seite zur langen verhalten muß wie $1:2^{1/2}$, d. i. $1:1{,}414\ldots$ Damit ist die Form der Flachformate endgültig festgelegt, denn es sollen sich alle Formate geometrisch ähnlich sein. Für die Räume sind ebenfalls die Verhältnisse gegeben. Die Aufgabe lautet hier: welche Kantenverhältnisse hat ein Raumrechteck (Parallelepiped), das durch Halbieren der Längsrichtung zwei Teile liefert, die dem Ausgangskörper geometrisch ähnlich sind? Die Ausrechnung ergibt die Kantenverhältnisse $2^0 : 2^{1/3} : 2^{1/3}$. Nehmen wir ein solches Raumrechteck und halbieren fortgesetzt die jeweilige Längsrichtung, so bekommen wir eine Reihe von Raumformaten, die den beiden ersten Grundsätzen genügen.

Zur endgültigen Festlegung der Hauptformatreihen brauchen wir noch eine dritte Bestimmung, die die letzte quantitative Freiheit regelt. Zur Gewinnung einer Ausgangsnorm ist in allen drei Gebieten eine quantitative Bestimmung notwendig. Der Anschluß an das metrische Maßsystem ist in solchen Fällen von jeher benutzt worden als Organisationsprinzip. Wir werden demgemäß sagen: Längen werden durch die Längeneinheit, Flächen durch die Flächeneinheit, Räume durch die Raumeinheit dem metrischen System angeschlossen, also ist die Ausgangsnorm für die Längennormen gleich der Längeneinheit, die Ausgangsnorm für die Flachformate gleich der Flächeneinheit und die Ausgangsnorm der Raumformate gleich der Raumeinheit. Oder wenn wir dem dritten Satz ebenfalls die knappste Form geben wollen: Die Ausgangsnorm ist gleich der Einheit.

Die Seiten der Flachformatnorm seien x und $x \cdot 2^{1/2}$. Aus dem letzten Satz folgt eindeutig $x \cdot x 2^{1/2} = 1$ oder $x = 2^{-1/4}$. Die beiden Seiten der Flachformatnorm sind $2^{-1/4}$ und $2^{+1/4}$.

Die Kanten der Raumformatnorm seien x, $x \cdot 2^{1/3}$ und $x \cdot 2^{2/3}$, dann gilt nach dem dritten Satz $x \cdot 2^{1/3} x \cdot 2^{2/3} x = 1$ oder $x = 2^{-1/3}$. Die drei Kanten der Raumformatnorm sind somit $2^{-1/3}$, 1 und $2^{+1/3}$.

Nun handelt es sich bloß noch um die Benennung. Die Wissenschaft betrachtet herkömmlich das Zentimeter als Ausgangsnorm ihrer Systeme. Dieser Vorgang ist logisch unhaltbar, da das Meter die internationale Norm ist. Außerdem fällt das Zentimeter aus der millesimalen Reihe der tatsächlich benutzten Maße vollständig heraus. Die Technik arbeitet andererseits von jeher nicht mit dem Zentimeter, sondern mit Millimeter und Meter. So unwillkommen es daher dem Wissenschaftler sein mag, es werden für die Technik nur Systeme in Frage kommen, die auf dem Meter oder einer millesimalen Ableitung davon aufgebaut sind. Folgerecht haben wir also hinter die oben gefundenen Abmessungen der Ausgangsnormen „Meter" zu setzen.

Aus der Flachformatnorm mit den Seiten 840,9 mm und 1189,2 mm können wir durch fortgesetztes Halbieren oder Verdoppeln die Reihe der abgeleiteten Flachformatnormen gewinnen. Die Formate sind alle einander ähnlich. Der Theoretiker ist nun geneigt, unerbittlich die Beschränkung aller Flachformatfreiheiten auf Formate dieser Reihe zu fordern. Also für Bücher, Zeitschriften, Briefe, Karten, Zeichnungen usw. immer nur Formate dieser Reihe. Aber schon die ersten Reformversuche der Brücke mußten doch Nebenreihen zulassen, einmal Reihen schmal-langer Formate, die aus der Hauptreihe durch (ev. wiederholtes) Längshalbieren zu gewinnen sind, dann Hüllformate, die größer sind als die Hauptformate. Auf den ersten Blick ergeben sich zwei verschiedene Hüllreihen, die eine entsteht durch prozentuale Vergrößerung (z. B. Briefumschläge), die andere durch für alle Formate konstante Vergrößerung (z. B. Verpackungsschachteln). Doch auch die Hauptreihe selbst hat Änderungen erlebt. Es wurde z. B. vom Normenausschuß betont, daß für alle Bedürfnisse der Technik die Hauptreihe zu wenig Formate enthalte. Es wurde daher vorgeschlagen, zwischen je zwei Formate ein neues einzuschieben, und zwar das geometrische Mittel zwischen beiden,

so daß eine Verdoppelung der zur Verfügung stehenden Anzahl entsteht.

Die Hauptnorm ist . . . . . $2^{-1/4} \times 2^{+3/4}$,
das nächst kleinere Format ist dann $2^{-3/4} \times 2^{-1/4}$,
das zwischengeschobene Format
hat demnach . . . . . $2^{-3/4} \times 2^{0}$

als Seiten (also kommt auch die Längeneinheit einmal als Kante vor). Die kombinierte Reihe beginnt:

. . . . . .
$2^{-1/4} \times 2^{+3/4}$
$2^{-3/4} \times 2^{0}$
$2^{-3/4} \times 2^{-1/4}$
$2^{-1/4} \times 2^{-3/4}$
. . . . . .

Beispielsweise hat der Normenausschuß die Reihe der zwischengeschobenen Formate als Rohmaße für die technischen Zeichnungen vorläufig angenommen, während die ursprüngliche Hauptreihe zweifellos günstigere Formate für den Briefverkehr liefert.

Naturgemäß erfordert eine Normierung des Raumes mehr Möglichkeiten, daher wird die gewonnene Raumformatreihe ebenfalls nicht die einzige bleiben. Abgesehen vom Zwischenschieben einer zweiten Reihe, wie wir es eben bei den Flachformaten erlebt haben, sind hier auch noch andere Formen erwünscht. Beispielsweise gibt es ein großes Anwendungsgebiet für Raumnormen bei den Verpackungen der Flachformate. Da aber die Kantenverhältnisse der Raumformate $(1 : 2^{1/2} : 2^{1/2})$ das der Flachformate $(1 : 2^{1/2})$ nicht enthalten, so entstehen durch Stöße von Flachformaten neue Raumformate, die ein Flachformat als eine Seite haben. Wollte man diesen Umstand zur Aufstellung einer Sonderreihe benützen, so muß einer der beiden ersten Sätze verändert werden. Es lassen sich zwei Möglichkeiten hier angeben:

a)
1. Die Raumformate sollen einander ähnlich sein.
2. Die Raumformate sollen ein Flachformat zu einer Seite haben.

b)
1. Die Raumformate sollen ein Flachformat zu einer Seite haben.
2. Die Raumformate sollen durch Verdopplung auseinander hervorgehen.

Der dritte Satz bleibt naturgemäß beide Male bestehen. Also auch diese Reihen stehen bereit. Es wird für jede reichlich Anwendungsgebiete geben. Dies in einer knappen Übersicht zu erörtern, ist unmöglich.

Zum Schluß noch einen Blick auf die Längennormen, sie sind noch das unentwickeltste Gebiet. Aus unseren Sätzen ergibt sich lediglich die durch fortgesetzte Halbierung oder Verdoppelung des Meters entstehende Reihe. Diese ist für die Technik als Normalreihe viel zu umfanglos. Ja, die Technik hat hier einen neuen Gedanken gebracht[1]), nämlich die Aufstellung einer Normalzahlenreihe. Nicht nur als reale Längen gebraucht die Technik und auch der Alltag unzählig oft innerhalb gewisser Grenzen willkürliche Abmessungen, sondern auch als Dimensionen ganz allgemein, z. B. als Durchmesser, als Längen an Dingen, die nicht unmittelbar durch die Längennormen normiert werden, als Abstände usw. Zur Behebung der dadurch bedingten vermeidbaren Zersplitterung hat Heilandt einen Entwurf zu einer Normalzahlenreihe aufgestellt, der zunächst noch der eingehenderen theoretischen Verarbeitung harrt. Falls eine Gesetzmäßigkeit herangezogen wird, kommt in erster Linie eine geometrische Reihe in Betracht mit sehr kleinen Zwischenräumen. Doch liegt hier eine praktische Lösung wohl näher, nämlich der Anschluß an unsere Zahlenreihe unter systematischer Auslassung einzelner Zahlen, wobei noch den Normalzahlen verschiedenes Gewicht zu geben ist, nachdem ihre Anwendbarkeit im speziellen Fall in erster Linie, in zweiter oder dritter zu untersuchen ist. So geht Heilandt vor. Sein Entwurf beginnt wie folgt:

μ: 1, 2, 3 . . . 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 . . . 100, 110, 120, 130, 140, 150 . . . 400, 420, 440, 460, 480, 500, 550, 600, 650, 700 . . . 1000,

in mm: 1,0, 1,1, 1,2, 1,25, 1,3, 1,4, 1,5 . . . 3,0, 3,2, 3,4, 3,5, 3,6, 3,8, 4,0 usw.

Das System ist, daß zunächst die ungeraden Zahlen, mit Ausnahme der Fünfer (Hälften) wegbleiben. Ein solches Verfahren liefert die beste Anwendungsmöglichkeit in der Technik. Offenbar enthält diese Reihe reichlich, ja für die meisten Fälle überreichlich viele Werte. Hier bewertet nun Heilandt seine Zahlen nach drei Klassen, je nach ihrer systematischen Reinheit. Für einen speziellen Fall sucht dann der Techniker eine Zahl der ersten Klasse zu verwenden. Ist dies aus äußeren Gründen unmöglich, so zieht er die zweite Klasse mit heran, und nur im Notfall greift er zu Zahlen der dritten Klasse. Wir haben in diesem Verfahren eine Kombination der Theorie mit der Praxis zu sehen. Es müßten notwendig Abrundungen der Glieder der zu benützenden geometrischen Reihe stattfinden, so daß letzten Endes eine ähnliche Reihe entstünde, wie die Heilandtsche.

Es ist bei diesem knappen Abriß der Theorie der Formatreform nicht möglich, auf

1) Dr.-Ing. Heilandt vertrat diesen Gedanken in einer Sitzung des Normenausschusses.

die vielen sich anschließenden Fragen allerorts einzugehen. Es soll die Wissenschaft lediglich in weitestem Kreise mit der theoretischen Grundlage vertraut gemacht werden, da die ganze Frage immer wieder auf theoretische Erwägungen zurückkommt, sobald die Praxis an Scheidewegen steht. Von der Wissenschaft wird dann Klärung gefordert und die Angabe von Richtlinien, auf denen sich die von der Praxis aufgestellten Bedürfnisse am einwandfreiesten befriedigen lassen.

Einige Literaturangaben:

Literatur der „Brücke, Intern. Inst. zur Organisation der geistigen Arbeit", München (eingegangen).

Literatur des „Normenausschusses der deutschen Industrie", Geschäftsstelle: Berlin, Sommerstr. 4 a.

„Normenlehre" des Verfassers, Verlag A. Haase, Leipzig 1917. (Vgl. die Anzeige, diese Zeitschr. **19**, 55, 1918.)

(Eingegangen 30. März 1918.)

Über die Störungen in den Linienserien der Bandenspektren.

Von T. Heurlinger.

Die Linien eines Systems von Banden können nach Deslandres durch drei ganze Zahlen, m, n, p, bestimmt werden. Jedem Wertsystem n, p entsprechen im allgemeinen mehrere Serien von Bandenlinien (welche Serien zweckmäßig durch eine vierte Zahl unterschieden werden könnten). Es gibt, wie ich früher gezeigt habe[1]), eine Klasse von Bandenspektren, die den Bjerrumschen Doppelbanden sehr ähnlich sind. In dieser Klasse entspricht jedem Wertsystem n, p, von der Feinstruktur abgesehen, eine und nur eine Serie, deren Frequenzen wenigstens für kleine m eine Gleichung von der Form

$$\nu = \nu_0 + c_1 m + c_2 m^2 + c_3 m^3 + \ldots, \quad (1)$$
$$(m = \ldots -2, -1, 0 + 1, \ldots)$$

befriedigen. Damit die Eigenschaften des Bandenspektrums ihre einfachsten Ausdrücke erhalten, muß die Zahl 0 einer ganz bestimmten, durch ihre geringe Intensität ausgezeichneten Linie gegeben werden. Dies gilt auch für komplizierter gebaute Banden, deren Serien nur durch Entwicklungen nach steigenden und fallenden Potenzen von m dargestellt werden können.

1) T. Heurlinger, Über die Struktur einer Klasse von Bandenspektren, Arkiv för Mat., Astr. och Fysik **12**, 4.

In einer Serie von Bandenlinien sind im allgemeinen einige Linien von ihren erwarteten Lagen verschoben. Nach Deslandres[1]) sollen die Linien, welche denselben Werten von m und p entsprechen, dieselben Störungen zeigen. Dies Gesetz hat sich bei meinen Untersuchungen bewährt, bedarf aber einer Modifikation. Es gilt nämlich nur, wenn man die Ordnungszahl m von der schwächsten Linie an rechnet, nicht wenn man, wie Deslandres es tut, von der Kante an rechnet. Als Beleg sei nur angeführt: In den sog. Cyanbanden λ 3883 und 4216 zeigen die Linien $+59$ sowie die Linien -60 dieselben Störungen. Von der Kante gerechnet haben diese Linien die Ordnungszahlen 87 bzw. 32 in 3883, 82 bzw. 37 in 4216. Die Beispiele für dieses Verhalten könnten vermehrt werden.

Bei den bisher untersuchten (nach Violett abschattierten) Banden gilt außerdem: Die Linien $+m$ und $-(m+1)$ zeigen dieselben Störungen. Als Beleg hierfür dienen die Fig. 1, 2 und die Tabelle I über die Störungen in den sog. Cyanbanden. Der Diskussion dieses Materials schicke ich eine qualitaive Bestätigung voraus: In der negativen Stickstoffbande λ 3914 sind die Linien $+3$, $+5$, $+7$ und -4, -6, -8 abnorm weite Dublette; dasselbe gilt von den Linien $+3$, -4 in λ 4237 [nach einer Zeichnung von Deslandres[2])]. Daß in der Bande λ 3246 des Phosphorbogens Linien, deren Ordnungszahlen numerisch ungefähr gleich sind, ungefähr denselben Komponentenabstand haben, geht aus einer Abhandlung von P. Geuter[3]) hervor. Diese Banden sowie die Cyanbanden gehören der genannten Klasse von Banden mit einfachen Serien an. In den Kohlebanden ($\lambda\lambda$ 6187, 5635, 5165, 4737) entsprechen jedem Wertsystem n, p 6 Serien, die aus zwei Zweigen bestehen, welche dem positiven und negativen Zweige der Cyanbanden entsprechen, aber kompliziertere Gleichungen als (1) befriedigen[4]). Hier gilt für alle bisher untersuchten Störungen: die Linien $+m$ und $-(m+k)$ zeigen identische Störungen. k ist eine kleine Zahl; ob sie gleich eins ist, mag vorläufig dahingestellt werden.

Wir betrachten nun die Störungen in den Cyanbanden. Die Linien sind im allgemeinen enge Dublette. Der Komponentenabstand, in Schwingungszahlen (Einheit cm^{-1}) gemessen, ist in Fig. 1 dargestellt. Für die Bande λ 3883

1) H. Deslandres, C. R. **139**, 1176, 1904; H. Deslandres et L. D'Azambuja, C. R. **157**, 671, 1913.
2) H. Deslandres, C. R. **139**, 1174, 1904.
3) P. Geuter, Zeitschr. für wiss. Phot. **5**, 41, 1907.
4) Diese Auffassung, welche von der bisher geltenden abweicht, wird an anderer Stelle begründet.

Tabelle I.

Bande		3883		4216		4606	3590	3883		4216		4606
Serie	m	Δm	$\Delta-(m+1)$	Δm	$\Delta-(m+1)$	$\Delta-(m+1)$	δm	δm	$\delta-(m+1)$	δm	$\delta-(m+1)$	$\delta-(m+1)$
A	15	−0,10	−0,17	−0,05	—			1,41	1.51[1])	1,43	1,34	
"	59	+0,17	+0,25[1])	+0,17	+0,12			—	—	—	—	
"	81	−0,13	—	—	—							
B	44	−0,1	−0	−0,15	−0,1	−0,2		0,29	0,30	0,44	0,38	0
"	45	−0,3	−0	−0,2	−0,1	−0,3		0,0	0,0	0,23	0,0	0
"	46	+0,25	+0,25	+0,3	+0,3	+0,25		3,13	3,00[1])	3,19	3,15	3,2
"	47	+0,15	+0,2	+0,2	+0,2	+0,1		0,58	0,47	0,56	0,47	0,5
"	48	+0,05	+0,05	+0,05	+0,05	+0,05		0,46	0,41	0,53	0,47	0,5
"	72	−0,6	—	−0,65	—	—		0,0	—	0,0[1])	—	
"	90	+0,55	—	+0,55	—	—		0,43	—	0,59	—	
C	28						3,06	3,11		3,25[1])	—	
"	29						0,32	0,36		0,29	—	
"	30						0,37	0,37		0,37	—	
"	31						0	0		0	0[1])	
"	32						0,72[1])	0,80		0,88[1])	0,82	
"	33						0	0,10		0,38	0[1])	

1) Diese Zahlen sind wegen Überlagerung von anderen Linien etwas unsicher.

Anmerkung. Gewisse Störungen scheinen von folgender Form zu sein: $\nu_m = f(m)$ für $m \lesseqgtr m_1$, $\nu_{m_1} = f(m_1) + \Delta m_1$, $\nu_m = f(m) + \Delta m_1'$ für $m \gtrless m_1$, die oberen Zeichen für positive, die unteren für negative m genommen. Unter dieser Annahme sind die Verschiebungen 3883 *A* nr 15 und 81 bestimmt. Man findet $\Delta_{15}' = +0{,}07$, $\Delta_{-16}' = -0{,}07$, $\Delta_{81}' = +0{,}04$.

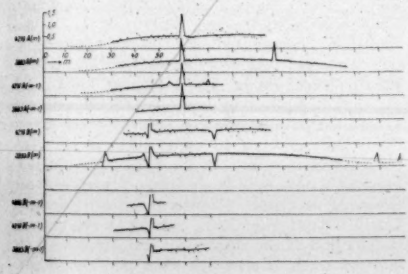


Fig. 1.

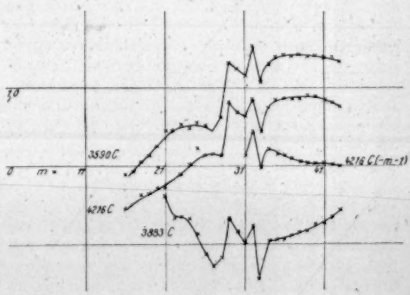


Fig. 2.

benutze ich die Messungen von Uhler und Patterson[1]), für die übrigen Banden Messungen, welche Herr J. Östner auf meine Veranlassung ausgeführt hat. Die von der 1., 2., 3. Kante ausgehenden Serien werden mit *A*, *B*, *C* bezeichnet. Der Komponentenabstand variiert unregelmäßig, aber so, daß man eine normale Aufspaltung definieren kann, welche mit der Ordnungszahl stetig variiert. Die wirklichen Komponentenabstände stimmen, von wenigen Ausnahmen abgesehen, nahe mit dem normalen überein. Die genannten Gesetze für die Störungen gelten sowohl für die normalen wie für die abnormen Komponentenabstände.

4) H. S. Uhler und R. A. Patterson, A. J. **42**, 434. 1915.

Die Tabelle I enthält teils einige Komponentenabstände (δ), teils die graphisch ermittelten Abweichungen (Δ) gewisser Linien von einer stetigen Kurve, in Schwingungszahlen gemessen. Diese Abweichungen beziehen sich auf die Mittelwerte beider Komponenten. Die leeren Plätze entsprechen Linien, welche wegen Überlagerung von anderen Linien nicht untersucht werden konnten. Eine komplizierte Störung in den *C*-Serien wird in Fig. 2 veranschaulicht. Als Funktion von m ist $\nu - a - bm - cm^2$ dargestellt, wo a, b, c für die verschiedenen Serien verschiedene Konstante sind, welche so gewählt sind, daß die darzustellende Größe klein bleibt. Die Tabelle und die Figur zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen den Störungen der Linien $+m$ und

Tabelle II.

Bande	c_1			100 c_2			Serie A			Serie B			Serie C		
	A	B	C	A	B	C	ν_0	1. Diff.	2. Diff.	ν_0	1. Diff.	2. Diff.	ν_0	1. Diff.	2. Diff.
3590		3,88	3,80		4,5	4,1				27 921,4			27 962,8		
3883	3,84	3,81	3,88	6,8	6,4	5,6	25 797,95			25 879,1	2042,3		25 945,6	2017,2	
4216	3,83	3,80	3,78	8,5	8,2	7,6	23 755,55	2042,40		23 863,1	2016,0	26,3	23,956,6	1989,0	28,2
4606	3,85	3,82		10,1	9,7		21 739,04	2015,91	26,49	21 873,5	1989,6	26,4			

$-(m+1)$ sowie zwischen den Störungen entsprechender Linien in einer Serie von Banden[1]). In mehreren Fällen liegen die Linien so dicht, daß ohne die Regeln für die Störungen Zweifel über die Zugehörigkeit der Linien zu den Serien herrschen können, und in der Tat habe ich in der Bande 3883 mehrere Veränderungen in der Anordnung von Uhler und Patterson vorgenommen. Die Möglichkeiten sind zwar nicht so viel, daß die erzielte Übereinstimmung ihren Wert verliert, aber die Feststellung von Ausnahmen wird erschwert.

Nur in den Serien 3883 A, B, 4216 A können die Ordnungszahlen ganz unabhängig von den Regeln für die Störungen mit einiger Sicherheit bestimmt werden. In den übrigen Serien müssen eine oder beide dieser Regeln herangezogen werden, um die Nullinien zu bestimmen. Mit den hier gewählten Ordnungszahlen ergeben sich für die Cyanbanden nach einer präliminären Berechnung folgende Werte für die Konstanten ν_0, c_1, c_2 der beim 3. Glied abgebrochenen Entwicklung (1). (Vgl. Tab. II.)

Aus dieser Tabelle geht folgendes hervor. Während c_2 um mehr als 100 Proz. variiert, ist c_1 eine für das ganze System von Banden angenähert konstante Größe. Nach Analogie mit den ultraroten Banden sowie mit dem Zeemaneffekt in Linienspektren liegt es nahe, zu erwarten, daß diese Konstante, ev. nach Multiplikation mit einer einfachen rationalen Zahl gleich $h/4\pi^2 Jc$ ist, unter J das Trägheitsmoment des Moleküls verstanden. Die fortgesetzten Untersuchungen werden hoffentlich über die Richtigkeit dieser Vermutung entscheiden. Aus einer Zeichnung bzw. Formel von Deslandres berechne ich $c_1 = 4{,}0$ bzw. 3,95 für die negativen Stickstoffbanden $\lambda\lambda$ 3914, 4237. Die angenäherte Übereinstimmung mit dem Werte bei den Cyanbanden war zu erwarten, da wahrscheinlich beide Bandensysteme von dem Stickstoffmolekül emittiert werden.

Für die Nullinien der Serien A, B, C der Cyanbanden gilt nach Tab. II mit großer Genauigkeit

$$\nu_0 = F(p) + bn + cn^2,$$

wo b und c von n und p unabhängig sind. Nach Deslandres soll dieselbe Formel (mit anderen Werten der Konstanten) für die Kanten gelten. Ein Vergleich zwischen der Tabelle der Kantenserien in Kaysers Handbuch II, S. 482 und Tab. II lehrt, daß die Übereinstimmung in der letzteren sehr viel besser ist. Die gesetzmäßige Anordnung der Nullinien kann wohl als eine Bestätigung von der Richtigkeit der gewählten Ordnungszahlen gelten.

Bei dieser Untersuchung benutzte ich Platten, welche von mir in Gemeinschaft mit den Herren E. Hulthén, J. Östner und J. Hallenborg mit dem Konkavgitter des hiesigen Instituts aufgenommen wurden. Auch hier möchte ich diesen Herren für ihre Mitarbeit herzlichst danken. Es ist mir auch ein Vergnügen, dem diensttuenden Direktor des Instituts, Herrn Privatdozenten Dr. M. Siegbahn, für sein freundliches Interesse und sein bereitwilliges Entgegenkommen meiner Wünsche in bezug auf Apparate verbindlichst zu danken. — An anderer Stelle wird ausführlich über die Resultate der Untersuchungen berichtet werden.

Lund, Physikalisches Institut, April 1918.

(Eingegangen 8. April 1918.)

1) Die Störung 33 C 3883 scheint indessen nicht vollkommen mit den entsprechenden Störungen in 4216 und 3590 übereinzustimmen.

BESPRECHUNGEN.

J. M. Eder, Johann Heinrich Schulze. Der Lebenslauf des Erfinders des ersten photographischen Verfahrens und des Begründers der Geschichte der Medizin. 4°. VI u. 79 S. mit 1 Abbildung und 4 Tafeln. Wien, k. k. Graphische Lehr- und Versuchsanstalt. (Im Kommissionsverlag bei R. Lechner (W. Müller) in Wien und bei Wilhelm Knapp in Halle a/S.) M. 6.—

Dem Verfasser der vorliegenden Schrift ist es im Jahre 1881 gelungen, eine in Vergessenheit geratene Abhandlung Johann Heinrich Schulzes aus dem Jahre 1727 aufzufinden, in der mit vollem Bewußtsein

von der Tragweite der Entdeckung die Lichtempfindlichkeit der Silbersalze zur Herstellung von Abbildungen benutzt wird. Verf. hat aus näherer Beschäftigung mit dem Leben des merkwürdigen Mannes, der von erstaunlicher Vielseitigkeit war — er war Professer der Medizin und der griechischen und arabischen Sprache — eine höchst interessante Studie gemacht, die einen Einblick gewährt in die rege Forschertätigkeit an den deutschen Hochschulen des 18. Jahrhunderts und eine Reihe wichtiger Ergebnisse deutscher Gelehrter in ihrem Werden zeigt. Die Drucklegung der biographisch-historischen Studie wurde in den „Invalidenkursen" der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien von daran teilnehmenden Setzern, Buchdruckern und Reproduktions-Technikern unter der Leitung von Lehrern der Anstalten durchgeführt und hat ein wertvolles typographisches Meisterwerk ergeben.

A. Coehn.

R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Heft 39/40 der Sammlung Vieweg (Tagesfragen aus den Gebieten der Naturwissenschaften u. Technik.) V u. 136 S. mit 83 Abbildungen. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. M. 5.60.

Bei den meisten neuen Erfindungen und bedeutsamen Fortschritten der Technik pflegt die praktische Tätigkeit des Ingenieurs zunächst die Hauptarbeit zu leisten, während die wissenschaftlich theoretische Durchdringung des Gegenstandes noch zurückbleibt. So ist es auch in der Flugtechnik gewesen, und hier ist dies besonders verständlich zu einer Zeit, für die der unmittelbare Erfolg schon mit Rücksicht auf die Forderungen des Krieges allein maßgebend ist und die nur selten warten kann, bis die systematisch aufbauende wissenschaftliche Forschung ihre Ergebnisse herausbringt. Immerhin gibt es eine große Zahl von Einzelarbeiten und wertvollen theoretischen Sonderuntersuchungen, die auch schon manche Schwierigkeiten und Widersprüche in den Anschauungen der Praxis aufgeklärt haben und ihr auch sonst wiederholt zugute gekommen sind.

Das vorliegende Buch stellt einen Versuch zu einer Zusammenfassung solcher Forschungsergebnisse zu einem einheitlichen Ganzen von allgemeinem Standpunkt aus dar. Es will den jetzigen Stand unseres Wissens vom Fluge zurückführen auf die als gesichert anerkannten Hauptsätze der hydrodynamischen Theorie und auf diesen ein festes Gebäude errichten, in dem das reiche Material der Praxis systematisch und übersichtlich bearbeitet Platz finden kann.

Es darf gleich gesagt werden, daß der Versuch im wesentlichen gelungen ist, wenigstens vom Standpunkt des Theoretikers. Dem in der Praxis stehenden Ingenieur werden allerdings die mit der mathematisch eleganten, aber technisch noch recht wenig eingebürgerten vektoranalytischen Auffassung verbundenen Schwierigkeiten das Studium des Buches nicht leicht machen. Dazu kommt eine in knappster Form gehaltene Darstellungsweise, die den Leser zu beständiger, scharfer Mitarbeit nötigt und ihm dadurch allerdings wieder den Vorteil des wirksameren Eindringens in den Gegenstand bietet.

Im ersten Abschnitt bringt Verf. zunächst die bekannten hydrodynamischen Grundlagen der Potentialströmung, wobei alles Überflüssige sorgfältig vermieden wird. An die Besprechuug des dynamischen Auftriebes und die Einführung des wichtigen Begriffes der Zirkulation schließt sich die Entwicklung der Blasiusschen Formeln für den Auftrieb und das Moment desselben. Ihre Anwendbarkeit für jede Art von Profilumrissen wird an einigen allgemein gehaltenen Beispielen erwiesen und dabei gezeigt, wie die Berechnung des Auftriebes auf ein vektorielles oder komplexes Randintegral zurückgeführt werden kann. Die hiermit verknüpften Schwierigkeiten umgeht der Verf. durch eine geschickte Reihenentwicklung (die Fundamentalreihe der Geschwindigkeit), welche er auch in den folgenden Kapiteln wiederholt benutzt. Schon in diesem Abschnitt findet sich eine praktisch bedeutsame Anwendung, auf die Strömungserscheinungen an Propellern, die sich zwanglos den allgemein gegebenen Grundformeln unterordnen lassen und für welche die Zirkulation berechnet werden kann.

Mit einer kurzen Einführung in die Methode der konformen Abbildung beginnt der den besonderen flugtechnischen Einzelproblemen gewidmete zweite Abschnitt. Eingehend werden hier nach einem Hinweis auf die heuristischen Schwierigkeiten bei der Anwendung auf beliebige Konturen die Kunstgriffe gezeigt, welche in einzelnen, gerade für die Flugtechnik bedeutsamen Sonderfällen eine Durchbrechung ermöglichen. Solche Beispiele sind die kreisförmige Kontur, die ebene und die gebogene Tragfläche, dann die Kombinationen zweier ebener Tragflächen hintereinander, Doppeldecker und zuletzt die schon erwähnte Anwendung auf Propeller (Tragflächen in Gitteranordnung).

Die Behandlung aller dieser Probleme führt jedesmal auf die Berechnung des Auftriebes und seiner Angriffslinie, es bietet sich dabei Gelegenheit auch verschiedene flugtechnisch-wichtige Besonderheiten, wie die Abrundung der Vorderkante (Joukowskische Konturen) und die gegenseitige Beeinflussung von Tragflächen praktisch zu besprechen.

Im letzten Abschnitt wird der für die Entwicklung der modernen Hydrodynamik so wichtige Übergang von der ebenen Potentialströmung der idealen Flüssigkeit zu den Verhältnissen des wirklichen bewegten Mediums unternommen. Wir erkennen dabei die physikalische Bedeutung und große praktische Wichtigkeit der Prandtlschen Grenzschichtentheorie, welche wir als Ursache für das Entstehen und Unterhalten der Zirkulation ansehen können, deren grundsätzliche Bedeutung für die flugtechnische Aerodynamik aus den bisherigen Ausführungen erkannt wurde.

Die Darstellung, welche der Verf. von der Ablösung der Wirbel und des dadurch bedingten Eintretens der Zirkulationsströmung gibt, ist sehr anschaulich und trotz aller Kürze eine der besten, die dem Referenten bekannt geworden sind. Sie führt auch unter folgerichtiger Verwertung des in früheren Abschnitten Besprochenen zu sofortiger praktischer Anwendung auf die flugtechnische Bewertung der Flügelprofile, wobei auf den Vorzug der gewölbten vor der ebenen Fläche und die günstige Wirkung der vornüber geneigten Vorderkante hingewiesen wird. Interessant ist auch die Feststellung, daß zwar die Oberseite des Flügels möglichst glatt sein soll, die Unterseite aber eine gewisse Rauhigkeit besitzen darf, zur Begünstigung der Zirkulation. In kurzer Übersicht wird dann der für den Stirnwiderstand und die Ökonomie des Fluges entscheidende Vorgang des Ablösens und Abrückens der Wirbel gezeigt, bei welcher Gelegenheit auch nach einem Hinweis auf die verdienstvollen Arbeiten von Föppl, v. Kármán und Rubach die gerade hier vorhandenen Lücken der Theorie hervorgehoben werden.

Daß die „das System begleitenden Wirbel" einen schädlichen Einfluß in einer Verringerung des Auftriebes haben, bespricht der Verf. im letzten Paragraphen. Hier wird der Schritt vom sogenannten „ebenen Pro-

blem" (der unendlich lang gedachten Tragfläche) zu der in Wirklichkeit eintretenden räumlichen Strömung getan durch entsprechende Einführung des Einflusses der die Tragflächen begleitenden Wirbelzöpfe. Diese treten, wie Verf. wohl zum erstenmal zeigt, nicht bloß an den Enden der Flügel auf, sondern sie entstehen bei veränderlicher Auftriebsdichte entlang der ganzen Fläche.

Hier konnte nun der Verf. eine Reihe neuer Gedanken entwickeln, die wohl ursprünglich von Professor Prandtl stammen, und die hier zu einem praktisch wertvollen Mittel zur Berechnung der Auftriebsziffer für endliche Seitenverhältnisse und veränderliche Auftriebsdichte ausgestaltet wurde. Mit diesen Ausführungen ist in der Tat die Theorie soweit es sich um die Frage des Auftriebes handelt auch den verfeinerten Anforderungen der Praxis nachgekommen. Dagegen konnten allerdings die besonderen mit dem Widerstande zusammenhängenden Fragen nur etwas summarisch behandelt werden; hier ist die Theorie allein noch nicht im Stande, die praktischen Forderungen zu erfüllen und auf diese Lücke ist auch vom Verf. ausdrücklich hingewiesen worden. Aus dem weiteren Inhalt dieses Paragraphen sei erwähnt, die zahlenmäßige Berücksichtigung des gegenseitigen Einflusses von Doppeldeckerflächen bei beliebiger Anordnung der Tragflächen über- oder hintereinander (wonach also auch der wichtige Fall gestaffelter Systeme ohne weiteres erledigt werden kann) und andere Beispiele mehr.

Zahlreiche Literaturhinweise, die am Schlusse in einer guten Übersicht der neueren Arbeiten auf diesem Gebiete zusammengefaßt sind, sind für das weitere Studium von Wert.

Dem Grammelschen Buche hat offensichtlich auch die Absicht zugrunde gelegen, die Theorie soweit als möglich den praktischen Aufgaben gerecht werden zu lassen. Mit oberflächlicher Anpassung war das nicht zu erreichen, es mußte tiefer gegangen werden, und darum ist auch das Werk nicht ganz leicht zu lesen. Aus der hier gegebenen Übersicht möge man aber ersehen, wie vielfache Früchte die erst so allgemein gehaltenen Ansätze des Buches tragen. Sie werden dem Leser die Mühe reichlich lohnen, mit der er sich vielleicht durch die anfänglichen Schwierigkeiten hat durcharbeiten müssen.

Eine weitere Empfehlung des für den mathematisch geschulten Flugtechniker wie für den theoretischen Aerodynamiker gleich wertvollen Werkes erscheint nach dem Gesagten überflüssig. A. Pröll.

L. Lucas, Die Akkumulatoren und galvanischen Elemente. Theorie, Konstruktion und Anwendung. Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage. 8°. VIII u. 141 S. mit 92 Abbildungen. Leipzig, Dr. Max Jänecke. 1917. Geb. M. 6.—

Das vortreffliche kleine Buch ist aus der reichen Erfahrung heraus geschrieben, über die der Verf. als Oberingenieur der größten deutschen Akkumulatorenfabrik verfügt. Er ist an der praktischen Ausgestaltung des Bleiakkumulators selbst hervorragend beteiligt gewesen.

Die Fabrikation der Akkumulatoren umfaßt auch heute noch eine große Reihe empirisch gefundener Einzelheiten, die von den Fabrikanten sorgfältig geführt werden. Der Verfasser verweist ausdrücklich darauf, daß er in der Mitteilung von Vorschriften usw. zurückhaltend sein wolle, weil er niemand verführen möchte, auf Grund weniger Studien ohne die außerordentlich große praktische Erfahrung, welche die Akkumulatorenfabrikation erfordert, sich an die Herstellung von Akkumulatoren im großen zu wagen. Das Buch ist also nicht für solche Leser, welche Akkumulatoren bauen wollen, sondern welche sie auf Grund eingehender Kenntnis ihrer Eigenart rationell benutzen wollen. Unter diesem Gesichtspunkt wird die Konstruktion der Akkumulatoren und die Verwendung der Akkumulatoren behandelt. Als besonders instruktiv sei daraus hervorgehoben die durch sehr übersichtliche Figuren unterstützte Darstellung der für eine Reihe von Zwecken geeigneten Schaltungsmöglichkeiten bei Akkumulatorenanlagen. Ein kurzes Kapitel behandelt die alkalischen Akkumulatoren (Edison, Jungner) und etwas dürftig sind die Angaben über die Primärelemente einschließlich der Normalelemente. Nachdem der Verf. dann noch ein Kapitel über allgemeine elektrochemische Theorien gebracht hat, kehrt er zu seinem Hauptthema zurück und gibt eine recht gute Zusammenfassung dessen, was über die Theorie des Bleiakkumulators bekannt ist. Das immer wiederkehrende „Helmholz" statt „Helmholtz" sollte aber in der dritten Auflage verbessert werden.

A. Coehn.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Wien Dr.-Ing. Moritz Dolch für Technologie der Brennstoffe, an der Universität Breslau Dr. Richard Meißner für Pharmakologie, an der Universität Zürich Dr. K. Agthe für Chemie.

Ernannt: Der Privatdozent für Agrikulturchemie an der Universität Jena Dr. Hubert Kappen zum ord. Professor an der landwirtschaftlichen Akademie in Tetschen, der ord. Honorarprofessor und Dozent für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr.-Ing. Waldemar Petersen zum ord. Professor der Elektrotechnik an derselben Hochschule.

Berufen: Der ord. Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Georg Hamel in gleicher Eigenschaft an die Universität Tübingen.

Verliehen: Den Observatoren am Meteorologischen Institut in Berlin Dr. Hermann Henze, Dr. Wilhelm Kühl und Dr. Oswald Venske der Titel Professor.

Gestorben: Der ord. Professor für Mathematik an der Universität Bern Dr. Johann Heinrich Graf, der Privatdozent für anorganische Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Gerhard Grüttner, der Physiker und Entdecker der Schwingungen bei elektrischen Entladungen Geh. Hofrat Dr. Berend Wilhelm Feddersen in Leipzig, der Professor der analytischen Chemie an der Technischen Hochschule Zürich Dr. Frederick Pearson Treadwell.

Gesuche.

Promovierter Physiker

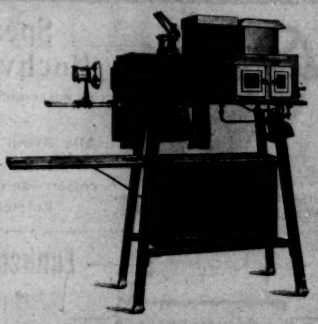
mit mehrjährigen praktischen Erfahrungen in technischer Physik, besonders Hochspannungstechnik und elektrischen Schwingungen, **sucht Stelle** an einem Hochschulinstitut oder an einem großen industriellen Laboratorium. Angebote unter **S. H. 519** an den Verlag S. Hirzel, Leipzig, Königstraße 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

MAX KOHL A.G. Chemnitz

Volleingezahltes
= Kapital =
Mk. 1600000.

Physikalische Apparate
Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel
in gediegener Ausführung.



Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Große Preise; Turin 1911: 2 Große Preise; Dresden 1911: Großer Preis.

Kleines Megadiaskop. Projektions-Apparat für alle im Unterricht gebräuchlichen Projektionsarten, z. B. für durchfallendes Licht, für auffallendes Licht, für Mikroprojektion, Spektral-, Polarisations-Interferenzerscheinungen usw.

Eingegangene Schriften.

(Eingehende Besprechung vorbehalten. Rücksendung nicht besprochener Bücher erfolgt in keinem Falle.)

Bakhuis Roozeboom, H. W., Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. gr. 8. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn. 1918.
1. Heft. 2. Teil: E. H. Büchner, Systeme mit zwei flüssigen Phasen. X u. 226 S. mit 72 Abbildungen und 1 Tafel. M. 12.—
2. Heft. 3. Teil: A. H. W. Aten, Systeme mit zwei Komponenten. VIII u. 200 S. mit 101 Abbildungen. M. 10.60.

Bartsch, A., Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. 8. IV u. 51 S. mit 10 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. M. 1.— mit 30% Teuerungszuschlag.

Brunswig, H., Die Explosivstoffe. Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge. (Sammlung Göschen. Bd. 333.) 8. 3., verbesserte und vermehrte Auflage. 152 S. mit 8 Abbildungen und 12 Tabellen. Berlin, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung. G. m. b. H. 1918. Gebunden M. 1.25.

Cohn, E., Physikalisches über Raum und Zeit. gr. 8. 3. Auflage. 31 S. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. M. 1.20 mit 30% Teuerungszuschlag.

Communications from the Physical Laboratory of the University of Leiden. No. 151. H. Kamerlingh Onnes XVII—XIX. J. E. Verschaffelt VI—IX. 1918.

Defant, A., Wetter und Wettervorhersage. gr. 8. VI u. 290 S. mit 142 Figuren u. 1 Karte. Wien, Fr. Deuticke. 1918. M. 18.—

Foppl, A., Vorlesungen über technische Mechanik. III. Festigkeitslehre. 6. Auflage. gr. 8. XVIII u. 469 S. mit 114 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. Geheftet M. 15.—, gebunden M. 16.— (mit 30% Teuerungszuschlag).

Fricke, H., Eine neue und einfache Deutung der Schwerkraft. Als Manuskript gedruckt. gr. 8. 46 S. Berlin, Druck von Hempel & Co. 1918.

Gumlich, E., Leitfaden der magnetischen Messungen mit besonderer Berücksichtigung der in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt verwendeten Methoden und Apparate, nebst einer Übersicht über die magnetischen Eigenschaften ferromagnetischer Stoffe. gr. 8. VIII u. 226 S. mit 82 Abbildungen und 6 Tafeln Magnetisierungskurven. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn. 1918. Geheftet M. 12.—, gebunden M. 14.40.

Jebsen, Jørg T., Versuch einer elektrodynamischen Systematik. gr. 8. IV u. 92 S. Kristiania, A. W. Brøggers Böktrykkeri A/S. 1918.

Kümmell, G., Photochemie. 2., verbesserte Auflage. 8. IV u. 107 S. mit 23 Abbildungen im Text und auf einer Tafel. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. Gebunden M. 1.50 mit 30% Teuerungszuschlag.

Lasareff, P., Recherches sur la théorie ionique de l'excitation. I. Théorie et lois des excitations liminaires des muscles, des nerfs et des terminaisons nerveuses dans les organes des sens. gr. 8. X u. 155 S. mit 15 Fig. Moscou, Société des éditions scientifiques. 1918.

Lindow, M., Differentialrechnung, unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. 2. Auflage. 8. VI u. 97 S. mit 45 Figuren im Text und 161 Aufgaben. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. Gebunden M. 1.50 mit 30% Teuerungszuschlag.

Luckey, P., Einführung in die Nomographie. I. Die Funktionsleiter. 8. IV u. 43 S. mit 24 Figuren im Text und einer Tafel. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. M. 1.— mit 30% Teuerungszuschlag.

Die Naturwissenschaften. VI. No. 18 vom 3. Mai 1918. Enth. E. Becker, Carl Stumpf. Zu seinem 70. Geburtstage. Berlin, Julius Springer. 1918. M. —.60.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen; B. = Besprechungen.)

Seite

Budde, E., Über die Bildung von Kombinationstönen und Obertönen 321

Elektrizitätstheorie: Über eine Beziehung der Gravitationskonstante zu den Grundgrößen der —, v. A. Haas 330

Gravitationskonstante: Über eine Beziehung der — zu den Grundgrößen der Elektrizitätstheorie, v. A. Haas 330

Haas, A., Über eine Beziehung der Gravitationskonstante zu den Grundgrößen der Elektrizitätstheorie 330

Kombinationstöne: Über die Bildung von — und Obertönen, v. E. Budde 321

Seite

Korn, A., Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes. IX. 337

Kreisel: Der — als Richtungsweiser, v. H. Usner. (B.) 343

Obertöne: Über die Bildung von Kombinationstönen und —, v. E. Budde. 321

Töne: Über die Bildung von Kombinations- und Ober—, v. E. Budde 321

Usner, H., Der Kreisel als Richtungsweiser. (B.) . 343

Voigt, W., Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen. Spezieller Teil I. (Z. B.) . . . 331

Verlag der C. F. Müllerschen Hofbuchhandlung m. b. H. Karlsruhe (Baden).

Soeben erscheint:

Zu Max Plancks sechzigstem Geburtstag

Ansprachen gehalten am 26. April in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft von E. Warburg: Planck und die Deutsche Physikalische Gesellschaft; M. von Laue: Plancks thermodynamische Arbeiten; A. Sommerfeld: Über die Entdeckung der Quanten; A. Einstein: Motive des Forschens, nebst einer Erwiderung von M. Planck.

36 Seiten 8° mit einer Abbildung. Broschiert Preis 1.20 Mk.

Zu beziehen durch die Buchhandlungen und auch vom Verlag.

Siemens & Halske A.-G.

Wernerwerk — Siemensstadt bei Berlin

Kondensatoren

Kondensator mit Drehschalter